ISSN 2075-9827

КМП

Карпатські математичні публікації

Карпатские математические публикации

Carpathian mathematical publications

Том 1

№ 1 **2009**

Карпатські математичні публікації
Науковий журнал

Адреса редакції: Факультет математики та інформатики
Прикарпатський національний університет імені
Василя Стефаника
[redacted]

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал
Т. 1, №1
2009

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL

V. 1, №1

2009

CONTENTS

Карпатские математические публикации

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Т. 1, №1

2009

СОДЕРЖАНИЕ

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, №1

УДК 512.552

Artemovych O.D.

LEFT NOETHERIAN RINGS WITH DIFFERENTIALLY TRIVIAL PROPER QUOTIENT RINGS

Artemovych O.D. *Left Noetherian rings with differentially trivial proper quotient rings*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 4–7.

We characterize left Noetherian rings with differentially trivial proper quotient rings.

Introduction

Let R be an associative ring with an identity. As usually, a mapping $d : R \to R$ such that

$$d(a+b) = d(a) + d(b) \text{ and } d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

for any $a, b \in R$ is called a derivation of R. A ring R having no non-zero derivations will be called differentially trivial. Differentially trivial left Noetherian rings were characterized by author in [1].

In this paper we prove the following

Theorem. *Let R be a left Noetherian ring with an identity. Then every proper quotient ring of R is differentially trivial if and only if it is of one of the following types:*

(*i*) *R is a differentially trivial Artinian ring;*

(*ii*) *R is a local ring with the differentially trivial residue field $R/J(R)$, where the Jacobson radical $J(R)$ is the heart of R;*

(*iii*) *$R = R_1 + R_2$ is a sum of ideals I_1 and I_2, where $I_1 \cap I_2$ is the heart of R and the quotient ring $R/(I_1 \cap I_2)$ is differentially trivial Artinian.*

As proved in [2], a left Artinian ring R is differentially trivial if and only if $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_m$ $(m \geq 1)$ is a ring direct sum of $R_1, \ldots, R_m$ and each R_i is either a differentially trivial field (i.e., R_i is algebraic over its prime subfield if the characteristic $\mathrm{char}(R_i) = 0$ and $R_i = \{a^{p_i} | a \in R_i\}$ if $\mathrm{char}(R_i) = p_i$) or isomorphic to some ring $\mathbb{Z}_{p^n}$ of integers modulo a

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16A72, 16A12.

prime power p^n. It is clear that every quotient ring of differentially trivial left Artinian ring is differentially trivial.

For convenience of the reader we recall some notation and terminology. If I is a non-zero ideal of R, then the quotient ring R/I is called proper. $N(R)$ will always denote the set of nilpotent elements of R, $J(R)$ the Jacobson radical of R. R^+ the additive group of R, We will also use other terminology from [3], [4] and [5].

1 Preliminaries

In the sequel we shall need the next

Lemma 1.1. *Let R be a ring with the identity 1. If all proper quotient rings of R are differentially trivial, then one of the following statements is satisfied:*

(1) *R is a differentially trivial ring;*

(2) *R has only trivial idempotents;*

(3) *$R = R_1 + R_2$ is a sum of ideals I_1 and I_2, where $I_1 \cap I_2$ is the heart of R and the quotient ring $R/(I_1 \cap I_2)$ is differentially trivial.*

Proof. Assume that e is a non-trivial idempotent of R. Put $f = 1 - e$. If R is commutative, then $R = eR \oplus fR$ is a ring direct sum and, consequently, R is differentially trivial. Therefore we suppose that R is not commutative. Then the ideal

$$I_0 = \bigcap \{I | I \text{ is a non-zero ideal of } R\}$$

is non-zero and $I_0^2 = (0)$. Clearly, R contains an idempotent e such that so $eI_0 = I_0$ and $fI_0 = (0)$.

1) Assume that $I_0 e = (0)$. Then $I_0 f = I_0$ and, as a consequence, $fRe = (0)$, $eRf = I_0$ and

$$R = eRe \oplus eRf \oplus fRf$$

is a group direct sum. We denote $eRe \oplus eRf$ by I_1 and $eRf \oplus fRf$ by I_2. Obviously, I_1, I_2 are ideals in R and $I_1 \cap I_2 = I_0$ is the heart of R.

2) Now suppose that $I_0 e \neq (0)$. Then $I_0 e = I_0$ and $I_0 f = (0)$. From this it follows that $eRf = fRe = (0)$ and

$$R = eRe \oplus fRf$$

is a group direct sum. Moreover, fRf is a two-sided ideal of R, $I_0 \leq eRe$ and we obtain that R is differentially trivial. □

Example 1.1. *Let $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2) = \mathbb{Q} + u\mathbb{Q}$ be a commutative $\mathbb{Q}$-algebra, where $u = X + (X^2)$. Then $u^2 = 0$, R is a local ring and the Jacobson radical $J(R) = u\mathbb{Q}$ is the heart of R. It is not difficult to prove that R has non-zero derivations and any proper quotient ring of R is differentially trivial (and so R is of type (ii) from Theorem).*

Example 1.2. *Let $R = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Q}e_2 + \mathbb{Q}u$ be a central $\mathbb{Q}$-algebra with the basis $\{e_1, e_2, u\}$, where*

$$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, u^2 = 0, e_1e_2 = e_2e_1 = 0,$$
$$e_1u = u, ue_1 = 0, e_2u = 0, ue_2 = u.$$

Then R is an Artinian ring with the identity $1 = e_1 + e_2$, its Jacobson radical $J(R) = u\mathbb{Q}$ is the heart of R. Moreover, R has non-zero derivations and all proper quotient rings of R are differentially trivial (and thus R is of type (iii) from Theorem).

Lemma 1.2. *Let R be a left Noetherian ring with an identity. If R is a differentially trivial ring with differentially trivial proper quotient ring, then it is Artinian.*

Proof. 1) Assume that the additive group R^+ is torsion. If R is a domain, then, by Proposition 3 of [1], it is a field. Therefore we suppose that R is not domain. Let P be a prime ideal of R. Since R/P is a field, we conclude that R is Artinian by Akizuki Theorem (see [6, Chapter IV, §2, Theorem 2]).

2) Now let us R^+ be a torsion-free group. Then, by Theorem 8 of [1], $J(R) = N(R) = (0)$. If $pR \neq R$ for some prime p, then pR is not contained in some maximal ideal M of R and therefore $R = M \oplus pR$ is a ring direct sum, a contradiction. Hence $pR = R$ for any prime p and R^+ is a divisible group. If R is a domain, then R is a field or $aR = a^2R$ for any element $a \in R$. This gives that R is Artinian. Assume now that R is not domain. Then, by Proposition 3 of [1], every prime ideal is maximal in R and, by Akizuki Theorem, R is Artinian.

3) In view of Theorem 8 of [1], from 1) and 2) it follows that R is Artinian. □

2 Proof of Theorem

($\Leftarrow$) is obviously.

($\Rightarrow$) Let R be a left Noetherian rings with every proper quotient ring differentially trivial.

1) Assume that $N(R) = \{0\}$. Then $I_0 = (0)$ (where I_0 is as in Lemma 1.1) and R is commutative. And therefore there are prime ideals $P_1, \ldots, P_n$ of R such that

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i = (0).$$

Then R is a subdirect product of differentially trivial domains $R/P_1, \ldots, R/P_n$. By Theorem 2.3.6 of [4],

$$S = \{c \in R | c \text{ is a regular element of } R\}$$

is an Ore set and so the ring of quotients $S^{-1}R$ is an Artinian ring. Consequently

$$S^{-1}R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$$

is a ring direct sum of fields $B_1, \ldots, B_n$ such that the field of quotients $Q(R/P_i) \cong B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. We have seen that $S^{-1}R$ is differentially trivial. Inasmuch as every derivation of R extended to some derivation of $S^{-1}R$, a ring R is differentially trivial.

2) If $N(R) \neq \{0\}$, then $N(R)$ is an ideal of R. By Lemma 1.2, $R/N(R)$ is Artinian. Then R is a local ring of type (ii) or, by Lemmas 1.1 and 1.2, a ring of one of types (i) or (iii).

□

References

1. O. D. Artemovych, *Differentially trivial left Noetherian rings* // Comment. Math. Univ. Carolinae (2)**40** (1999), 201-208.
2. O. D. Artemovych, *Differentially trivial and rigid rings of finite rank* // Periodica Math. Hungarica (1-2) **36** (1998), 1–16.
3. I. Lambek, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publ. C., Waltham, 1966.
4. J. C. McConnell and J. C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
5. L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, vol.I, Academic Press, New York London, 1970.
6. O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, vol.I, D. van Nostrand C., Addison-Wesley P. C., Reading, 1970.

Vasyl Stefanyk Precarpathian University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine.
orest_artemovych@hotmail.com

Received 16.03.2009

Артемович О.Д. *Ліві нетерові кільця з диференційно-тривіальними власними фактор-кільцями // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 4–7.

Охарактеризовано ліві нетерові кільця з диференційно-тривіальними власними фактор-кільцями.

Артемович О.Д. *Левые нетеровы кольца с дифференциально-тривиальными собственными фактор-кольцами // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 4–7.

Охарактеризовано левые нетеровы кольца с дифференциально-тривиальными собственными фактор-кольцами.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.98

Дмитришин М.І., Лопушанський О.В.

ПРОСТОРИ ТИПУ ЛОРЕНЦА УЛЬТРАГЛАДКИХ ВЕКТОРІВ ЗАМКНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 8–14.

Визначено простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів в банахових просторах. Встановлено інтерполяційні властивості таких просторів та показано їх застосування до розв'язання проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора.

Вступ

Простори ультрагладких векторів замкнених операторів над банаховими просторами визначено в роботі [4], де побудовано операторне числення на таких класах векторів. Розв'язанню проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора, у тому числі ультрагладкими векторами, присвячено роботи [1, 2]. У цьому зв'язку відзначимо також роботу [3], де введено поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова. У роботі [8] техніку ультрагладких векторів застосовано до побудови спектральних розкладів необмежених операторів в банахових просторах. Там же наведено застосування абстрактних результатів в теорії регулярних еліптичних диференціальних операторів у обмежених областях.

У запропонованій роботі розглянуто класи ультрагладких векторів замкнених операторів, які утворюють інтерполяційні простори типу Лоренца. Досліджено властивості таких просторів (теор. 1), а також, породжених ними, апроксимаційних просторів (теор. 2,3). Оцінки відстані від елементів банахового простору до підпростору ультрагладких векторів представлено у вигляді нерівностей з використанням квазінорм відповідних апроксимаційних просторів.

Надалі використовуємо термінологію і позначення роботи [9].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 47A57, 47A58, 46E35.

1 Простори типу Лоренца ультрагладких векторів

Нехай $\mathfrak{X}$ — банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ з нормою $\|.\|$; $A:\mathcal{D}(A)\subset\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ — необмежений замкнений лінійний оператор із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Для будь-якого числа $\nu>0$ і довільної послідовності додатних чисел $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ розглянемо послідовність $\{\mu_k^{-1}(A/\nu)^k x\}_{k=0}^\infty$, $x\in\mathcal{D}(A^\infty)=\bigcap\limits_{k=0}^\infty\mathcal{D}(A^k)$. Якщо $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ — послідовність в просторі $\mathfrak{X}$, яка збігається до нуля, то через $\{x_k^*\}_{k=0}^\infty$ позначимо послідовність, яка складається з тих самих елементів, розміщених в порядку незростання норм $\|x_0^*\|\ge\|x_1^*\|\ge\ldots\ge\|x_k^*\|\ge\ldots$.

Покладемо $x_k\equiv\mu_k^{-1}(A/\nu)^k x$ і для довільних чисел $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$ визначимо простори вигляду

$$\mathcal{E}^\nu_{p,q}(A)\equiv\Big\{x\in\mathcal{D}(A^\infty):\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_{p,q}(A)}=\Big(\sum_{k=1}^\infty\|x^*_{k-1}\|^q k^{\frac{q}{p}-1}\Big)^{1/q}<\infty\Big\},$$

$$\mathcal{E}^\nu_{p,\infty}(A)\equiv\Big\{x\in\mathcal{D}(A^\infty):\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_{p,\infty}(A)}=\sup_k\|x^*_{k-1}\|k^{\frac{1}{p}}<\infty\Big\}.$$

Простори $\mathcal{E}^\nu_{p,q}(A)$ назвемо *просторами типу Лоренца ультрагладких векторів оператора* A. При $p=q$ отримуємо відомі простори $\mathcal{E}^\nu_{p,p}(A)=\mathcal{E}^\nu_p(A)$ ультрагладких векторів [4]. Якщо $\mu_k\equiv1$, то $\mathcal{E}^\nu_p(A)$ — простір векторів експоненціального типу оператора A [5].

Нехай $0<t,\nu<\infty$, $1<p_0,p_1<\infty$, $1\le q,q_0,q_1\le\infty$, $0<\theta<1$. Визначимо інтерполяційний простір $\big(\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A)\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta,q}}=\Big(\int_0^\infty\big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A))\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q},$$

$\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A))=\inf\limits_{x=x_0+x_1}\big(\|x_0\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A)}+t\|x_1\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A)}\big)$. При $q=\infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A)).$$

Теорема 1. *Нехай* $1<p_0,p_1<\infty$, $p_0\ne p_1$, $1\le q,q_0,q_1\le\infty$, $0<\theta<1$. *Тоді справедлива рівність*

$$\big(\mathcal{E}^\nu_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^\nu_{p_1,q_1}(A)\big)_{\theta,q}=\mathcal{E}^\nu_{p,q}(A),\quad\text{де}\quad\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.\tag{1}$$

Доведення. Розглянемо наступні банахові простори $\mathcal{E}^\nu_1(A)\equiv\Big\{x\in\mathcal{D}(A^\infty):\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_1(A)}=\sum\limits_{k=0}^\infty\|x_k\|<\infty\Big\}$, $\mathcal{E}^\nu_\infty(A)\equiv\Big\{x\in\mathcal{D}(A^\infty):\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(A)}=\sup\limits_k\|x_k\|<\infty\Big\}$ і покажемо, що виконується рівність

$$\big(\mathcal{E}^\nu_1(A),\mathcal{E}^\nu_\infty(A)\big)_{\theta,q}=\mathcal{E}^\nu_{1/(1-\theta),q}(A).\tag{2}$$

При $0 < t \le 1$ маємо $\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)) = t\|x_0^*\|$. Нехай $x = x^0 + x^1$, $x^0 \in \mathcal{E}_1^\nu(A)$, $x^1 \in \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$. Використовуючи оцінку $\sum\limits_{k=1}^{j-1} \|x_k^*\| \le \|x^0\|_{\mathcal{E}_1^\nu(A)} + \ \|x^1\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(A)}$ і розклад

$$x_s^{0*} = x_s^* - \frac{x_s^*}{\|x_s^*\|}\|x_{j-1}^*\| \quad \text{для} \quad s = 0, \dots, j-1,$$
$$x_s^{0*} = 0 \qquad\qquad \text{для} \quad s \ge j,$$

отримуємо $\mathcal{K}(j, x; \mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)) = \sum\limits_{k=1}^{j-1} \|x_k^*\|$, $j = 1, 2, \dots$. Отже, при $q < \infty$

$$\|x\|^q_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q}} \sim \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\theta q - 1}\Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|x_k^*\|\Big)^q \ge \sum_{j=1}^{\infty} j^{(1-\theta)q-1}\|x_{j-1}^*\|^q.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, при $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ і $0 < \varepsilon < \theta$ знаходимо

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-\theta q-1}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|x_k^*\|\Big)^q \le \sum_{j=1}^{\infty} j^{\theta q - 1}\sum_{k=1}^{j} k^{(1-\theta)q-1+\varepsilon q}\|x_{k-1}^*\|^q \times$$
$$\Big(\sum_{k=1}^{j} k^{\theta q' - 1 - \varepsilon q'}\Big)^{q/q'} \le c\sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-\theta)q-1}\|x_{k-1}^*\|^q.$$

При $q = \infty$ маємо $\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,\infty}} \sim \sup\limits_j j^{-\theta}\sum\limits_{k=0}^{j-1}\|x_k^*\| \sim \sup\limits_j j^{1-\theta}\|x_{j-1}^*\|$ і рівність (2) встановлено.

Нехай $1 \le q \le \tilde{q} \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Тоді справедливі вкладення

$$\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q} \subset \left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,\tilde{q}}. \tag{3}$$

Дійсно, при $1 \le q \le \tilde{q} < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,\tilde{q}}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{q}} \times$$
$$\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A))\right)^{(1-q/\tilde{q})} \le c\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q}},$$

звідки отримуємо (3). Вкладення $\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q} \subset \left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,\infty}$ випливає з нерівності $\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)) \le c\,t^\theta\|x\|_{\left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,q}}$.

Застосовуючи теорему про реітерацію [6, теор. 3.11.5], в силу рівності (2), маємо

$$\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta,q} = \left(\mathcal{E}_1^\nu(A), \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\right)_{\lambda,q} = \mathcal{E}_{1/(1-\lambda),q}^\nu(A), \tag{4}$$

де $p_0 = 1/(1-\theta_0)$, $p_1 = 1/(1-\theta_1)$, $\ = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$, $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$. При $p = 1/(1- \ )$ із рівності (4) отримуємо (1). □

Наслідок 1.1. *В умовах теореми 1 існують такі додатні числа $c_1 = c_1(\theta, q)$ і $c_2 = c_2(\theta, q)$, що виконуються нерівності*

$$\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)) \le c_1 t^\theta \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A)}, \quad x \in \mathcal{E}_{p,q}^\nu(A), \tag{5}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A)} \le c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A)}\|x\|^\theta_{\mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)}, \quad x \in \mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A)\bigcap \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A). \tag{6}$$

При $1 \le q \le \tilde{q} \le \infty$ справедливі вкладення

$$\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A) \subset \mathcal{E}_{p,\tilde{q}}^\nu(A). \tag{7}$$

Крім цього, якщо $\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A) \subset \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)$ і $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, то

$$\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta_0,q} \subset \left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta_1,\tilde{q}}. \tag{8}$$

Доведення. Нерівності (5) і (6) випливають із (1) та [6, теор. 3.11.2]. Вкладення (7) отримуємо з (3).

Із нерівності $\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)) \le t\,\|x\|_{\mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A))}$, $x \in \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)$, маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta_1,1}} = \int_0^1 t^{-\theta_1}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A))\frac{dt}{t} +$$
$$\int_1^\infty t^{-\theta_1}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A))\frac{dt}{t} \le c\,\|x\|_{\mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)} +$$
$$\sup_{t>0} t^{-\theta_0}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p,q_1}^\nu(A))\int_1^\infty z^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{dz}{z} \le$$
$$c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta_0,\infty}},$$

звідки випливає вкладення $\left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}_{p_0,q_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{p_1,q_1}^\nu(A)\right)_{\theta_1,1}$. Звідси і з (7) отримуємо (8). □

Відзначимо, що простори $\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A)$ банахові, оскільки є інтерполяційними просторами. Із (1) також випливає, що $\|x\|_{\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A)}$ — квазінорма, однак, взагалі кажучи, не норма.

2 Апроксимаційні простори

Нехай $0 < \nu, \alpha < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \tau \le \infty$. Визначимо апроксимаційні простори вигляду

$$\mathcal{E}_{p,q,\tau}^{\nu,\alpha}(A) \equiv \Big\{x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q,\tau}^{\nu,\alpha}(A)} = \Big(\int_0^\infty t^{\alpha\tau}E(t,x)^\tau\frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau} < \infty\Big\},$$
$$\mathcal{E}_{p,q,\infty}^{\nu,\alpha}(A) \equiv \Big\{x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q,\infty}^{\nu,\alpha}(A)} = \sup_{t>0} t^\alpha E(t,x) < \infty\Big\},$$

де $E(t,x) = \inf\limits_{\|x_0\|_{\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A)} \le t} \|x - x_0\|$, $x_0 \in \mathcal{E}_{p,q}^\nu(A)$, $0 < t < \infty$.

Для $0 < \ \le \infty$, $0 < \theta < 1$ розглянемо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A), \mathfrak{X}\right)_{\theta,r}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p,q}^\nu(A), \mathfrak{X}\right)_{\theta,r}} = \Big(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p,q}^\nu(A), \mathfrak{X})\right]^r\frac{dt}{t}\Big)^{1/r},$$

де $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) = \inf\limits_{x=x_0+x_1}\left(\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)} + t\|x_1\|\right)$. При $= \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}).$$

Нехай $\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)\right]^{\theta}$, $0<\theta<1$ — простір $\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$ з квазінормою $\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}$. Згідно з [6, теор. 7.1.7] при $\theta = 1/(\alpha+1)$ і $\tau = \theta$ справедлива рівність

$$\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)\right]^{\theta} = \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,\tau}. \tag{9}$$

Таким чином, $\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$ можна розглядати як інтерполяційний простір між $\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)$ і $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Існують такі додатні числа $c_1 = c_1(\theta,\tau)$, $c_2 = c_2(\theta,\tau)$, що виконуються нерівності*

$$E(t,x) \le c_1 t^{-\alpha}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A), \tag{10}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)} \le c_2\|x\|^{\alpha}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}\|x\|, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A). \tag{11}$$

Доведення. Згідно з [6, теор. 3.11.4(b)], для деякого додатного числа c маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,\tau}} \le c\,\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}\|x\|^{\theta}, \ x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A).$$

Звідси і з рівності (9) при $\alpha = (1-\theta)/\theta$ випливає існування такої сталої $c_1 > 0$, що виконується нерівність (11).

Згідно з [6, теор. 3.11.4(a)], для деякого числа $c > 0$ маємо $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) \le ct^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,\tau}}$, $x \in \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}\right)_{\theta,\tau}$. З цієї нерівності та (9) випливає існування такої сталої $c_0 > 0$, що $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) \le c_0 t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$. Покладемо $\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) = \inf\limits_{x=x_0+x_1}\max\left\{\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)}, t\|x_1\|\right\}$. Оскільки виконується нерівність $\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) \le \mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X})$, то

$$\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) \le c_0 t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A). \tag{12}$$

Згідно з [6, лема 7.1.2], для кожного $t > 0$ існує таке $s > 0$, що $\mathcal{K}_{\infty}(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A),\mathfrak{X}) = s$ і $E(s+0,x) \le s/t$. Звідси та з нерівності (12) маємо $s^{1-\theta}E^{\theta}(s,x) \le c_0^{1/\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)$.При $\alpha = (1-\theta)/\theta$ отримуємо

$$s^{\alpha}E(s,x) \le c_0^{1/\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A).$$

Поклавши $c_1 = c_0^{1/\theta}$, приходимо до (10). □

Із результатів [7] випливає, що у випадку оператора A з точковим спектром при $\mu_k \equiv 1$ нерівність (10) дає оцінку відстані від вектора $x \in \mathfrak{X}$ до підпростору $\mathcal{E}^{\nu}_{p,q}(A)$, елементами якого є кореневі вектори оператора A.

Нехай $0 < \alpha_0, \alpha_1 < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \tau, \tau_0, \tau_1 \le \infty$. Визначимо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau}} = \left(\int_0^{\infty}\left[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A))\right]^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau},$$

$\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)) = \inf\limits_{x=x_0+x_1}\left(\|x_0\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)} + t\|x_1\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)}\right)$.

Теорема 3. *При $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ і $\alpha_0 \ne \alpha_1$ виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau} = \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A). \tag{13}$$

Доведення. Згідно з теоремою про реітерацію при $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $\theta_0 = 1/(\alpha_0+1)$, $\theta_1 = 1/(\alpha_1+1)$ і $\tau = \theta r$ маємо

$$\left(\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)\right]^{\theta_0}, \left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right]^{\theta_1}\right)_{\lambda,r} = \left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)\right]^{\theta}. \tag{14}$$

Застосовуючи теорему про степені [6, теор. 3.11.6], отримуємо

$$\left(\left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)\right]^{\theta_0}, \left[\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right]^{\theta_1}\right)_{\lambda,r} = \left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)^{\theta}_{\rho,\tau}, \tag{15}$$

де $\rho = \lambda\theta_1/\theta$. З рівностей (14) і (15) при $\alpha = (1-\rho)\alpha_0 + \rho\alpha_1$ маємо

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A), \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\rho,\tau} = \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A),$$

звідки приходимо до (13). □

Наслідок 2.1. *Нехай $0 < \theta < 1$ і $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ при $\alpha_0 \ne \alpha_1$. Існують такі додатні числа $c_1 = c_1(\theta,\tau)$ і $c_2 = c_2(\theta,\tau)$, що виконуються нерівності*

$$\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)) \le c_1 t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A), \tag{16}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A)} \le c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A)}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)}, \ x \in \mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A) \cap \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A). \tag{17}$$

При $0 < \tau \le \tilde{\tau} \le \infty$ справедливі вкладення

$$\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tau}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p,q,\tilde{\tau}}(A). \tag{18}$$

Крім цього, якщо $\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)$ і $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, то

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta_0,\tau} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta_1,\tilde{\tau}}. \tag{19}$$

Доведення. Нерівності (16) і (17) випливають із (13) та [6, теор. 3.11.2]. При $0 < \tau \le \tilde{\tau} < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tilde{\tau}}} \le \left(\int_0^{\infty}\left(t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{\tau}} \times$$

$$\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A))\right)^{(1-\tau/\tilde{\tau})} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau}},$$

звідки отримуємо (18). Із нерівності (16) безпосередньо випливає вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\tau} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha_0}_{p,q,\tau_0}(A),\mathcal{E}^{\nu,\alpha_1}_{p,q,\tau_1}(A)\right)_{\theta,\infty}.$$

Вкладення (19) можна показати подібно до (8). □

Література

1. Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, №5. — С. 616–628.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Операторный подход к вопросам аппроксимации* // Алгебра и анализ. — 1997. — Т.9, №6. — С. 90–108.
3. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах.* // Доп. НАН України. — 2007. — №12. — С. 16–22.
4. Лопушанський О.В. *Операторне числення на ультрагладких векторах.* // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, №4. — С. 502-513.
5. Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа.* // Докл. АН БССР. — 1983. — Т. 27, №9. — С. 791–793.
6. Bergh J., Löfström J. Interpolation spaces. An introduction, Springer, Berlin, 1976, 247 p.
7. Lopushansky O., Dmytryshyn M. *Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum*, Chapter 12 in book *"General Topology in Banach Spaces"*. Nova Sci. Publ., Huntington, New York, 2001, P. 137–145.
8. Lopushansky O., Dmytryshyn M. *Interpolated subspaces of exponential vectors of the unbounded operators in Banach spaces* , Demonstratio Mathematica, **37**, 1 (2004), 149–158.
9. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators, Springer, Berlin, 1995, 664 p.

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна.

Інститут математики Жешівського університету,

Жешів, Польща.

Надійшло 3.11.2008

Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. *Lorentz type spaces of ultrasmooth vectors of closed operators*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 8–14.

Lorentz type spaces of ultrasmooth vectors of closed operators in Banach spaces are defined. Interpolation properties of such spaces are established and their application to the decision of problem of approaching of elements of Banach space is shown different classes of smooth vectors of the closed operator.

Дмитришин М.И., Лопушанский О.В. *Пространства типа Лоренца ультрагладких векторов замкнутых операторов // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 8–14.

Определены пространства типа Лоренца ультрагладких векторов замкнутых операторов в банаховых пространствах. Установлены интерполяционные свойства таких пространств и показано их применение к решению проблемы приближения элементов банахова пространства разными классами гладких векторов замкнутого оператора.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1 — Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.98

Загороднюк А.В.

АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Загороднюк А.В. *Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 15–34.

В роботі зроблено огляд основних результатів про структуру множини максимальних ідеалів алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі та доведено деякі нові результати в цьому напрямку. Отримано також застосування до інтерполяції в алгебрах аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору.

Вступ

Дослідження алгебр аналітичних функцій на підмножинах банахового простору, зокрема рівномірних алгебр, є важливим напрямком сучасної теорії аналітичних функцій на банахових просторах. Оскільки кожна рівномірна алгебра є підалгеброю алгебри неперервних функцій на множині максимальних ідеалів (характерів), то визначальними в цих дослідженнях є проблема опису множини максимальних ідеалів та опису аналітичних структур (структур аналітичного многовиду) на цій множині. Зауважимо, що у нескінченновимірному банаховому просторі існує дуже багато різних цікавих алгебр аналітичних функцій. В останні роки зріс інтерес до алгебри $H_b = H_b(X)$ цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X, введених у [17], алгебри $H^\infty(B)$ обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору, алгебри $H^\infty_{uc}(B)$ аналітичних рівномірно неперервних функцій на одиничній кулі банахового простору. Крім того, вивчаються "слабкі" аналоги цих алгебр. Дослідження у цьому напрямку були започатковані в роботах Р. Арона, Б. Коула, Т. Корна та Т. Гамеліна [6], [2], [3]. Далі ця тема набула розвитку в [4], [12], [13], [14], [21]. При цьому повний опис множини максимальних ідеалів алгебр H_b і $H^\infty_{uc}(B)$ було отримано лише для дуже вузького класу просторів.

У роботах автора [24], [25] запропоновано новий підхід до вивчення цієї проблеми, який дозволяє отримати явний опис множини характерів вказаних алгебр у вигляді послідовності елементів з деяких підпросторів тензорних степеней вихідного простору. В даній роботі уточнено результати [24] і знайдено нові застосування цих результатів у теорії аналітичних відображень на банахових просторах.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.

Стаття містить широкий огляд з даної тематики та всі необхідні попередні відомості. Детальнішу інформацію про аналітичні функції на банахових просторах можна знайти в монографіях [8], [9], [20].

1 Попередні відомості

Лінійний підпростір J комутативної комплексної банахової алгебри X з одиницею $\mathbf{1}$ називається ідеалом, якщо $ayb \in J$ для довільних $a, b \in X$ і $y \in J$. Власний ідеал називається максимальним, якщо він не міститься строго в іншому власному ідеалі. Гомоморфізм з банахової алгебри X в поле $\mathbb{C}$ називається *характером* (*мультиплікативним функціоналом*). Надалі ми будемо вживати терміни "характер", "мультиплікативний функціонал", "комплексний гомоморфізм" як синоніми. Відомо, що довільний характер на банаховій алгебрі є неперервним і його норма дорівнює одиниці. Ядро кожного ненульового характера є максимальним ідеалом. Якщо X — комутативна алгебра, то вірно навпаки: кожен максимальний ідеал є ядром деякого характера. Для комутативних банахових алгебр прийнято ототожнювати множину характерів і множину максимальних ідеалів. Цю множину позначають $M(X)$ і називають *спектром* алгебри X. Підмножина

$$\mathcal{R} = \{a \in X \ : \ \mathbf{1} + xa \text{ є оборотнім елементом для довільного } x \in X\}$$

називається *радикалом Джекобсона* алгебри X. Банахова алгебра X називається *напівпростою*, якщо $\mathcal{R} = \{0\}$. Для комутативних алгебр це рівносильно тому, що комплексні гомоморфізми розділяють точки на X. Відомо, що якщо X — напівпроста комутативна банахова алгебра, то кожному елементу $x \in X$ відповідає функція $\widehat{x}$ на $M(X)$, визначена формулою $\widehat{x}(\varphi) := \varphi(x)$, де φ — довільний характер з X. Відображення $x \mapsto \widehat{x}$ називають *перетворенням Гельфанда*. Найслабша топологія на $M(X)$, в якій всі функції $\widehat{x}$, $x \in X$ є неперервними, називається *топологією Гельфанда*. Відомо, що для банахової алгебри $M(X)$ є компактним гаусдорфовим простором в топології Гельфанда. Таким чином, кожна напівпроста комутативна банахова алгебра вкладається як підалгебра в алгебру всіх неперервних функцій на деякому компакті (який збігається з $M(X)$). Це вкладення здійснюється перетворенням Гельфанда. Напівпроста комутативна алгебра називається рівномірною, якщо перетворення Гельфанда є ізометрією. Детальнішу інформацію про банахові алгебри можна знайти в книжках [23], [11], [19].

Ми будемо казати, що Z — *алгебра Фреше*, якщо Z — простір Фреше (локально-опуклий метризовний простір) і напівнорми на Z, які породжують локально опуклу топологію на Z, можна вибрати мультиплікативно опуклими. Іншими словами, топологія на Z задається деякою зліченною системою напівнорм q_j таких, що

$$q_j(xy) \leq q_j(x) q_j(y),$$

для довільних $x, y \in Z$, $j = 1, \ldots, \infty$.

Нехай X і Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$ комплексних $\mathbb{C}$ або дійсних $\mathbb{R}$ чисел. Для натуральних $n, m \in \mathbb{N}$, будемо позначати $X^n Y^m$ — декартовий добуток n-того декартового степеня простору X із m-тим декартовим степенем простору Y.

Використовуючи позначення з монографії Нахбіна [22], які тепер є загальноприйнятими, для довільного $n \in \mathbb{N}$ ми позначимо $\mathcal{L}(^n X, Y)$ простір всіх неперервних n-лінійних відображень з X в Y. Нехай Δ_n є природним вкладенням, яке називається *діагональним відображенням* з X в X^n, визначеним наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta_n : \ & X \to X^n \\ & x \mapsto (x, \ldots, x). \end{aligned}$$

Відображення P з X в Y називається *неперервним n-однорідним поліномом*, якщо $P(x) = B(\Delta_n(x))$ для деякого $B \in \mathcal{L}(^n X, Y)$. Ми будемо позначати $\mathcal{P}(^n X, Y)$ — лінійний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів з X в Y. n-лінійне відображення B називається симетричним, якщо $B(x_1, \ldots, x_n) = B(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для довільної підстановки σ на множині $\{1, \ldots, n\}$. Простір усіх симетричних n-лінійних неперервних відображень позначається $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$.

Твердження 1.1. ([8]). *Простори $\mathcal{L}(^n X, Y)$ і $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$ є банаховими просторами відносно рівномірної норми на одиничній кулі X^n.*

Теорема 1. ([8]). *Відображення*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s(^n X, Y) & \to \mathcal{P}(^n X, Y) \\ B \quad & \mapsto B \circ \Delta_n \end{aligned}$$

є ізоморфізмом між банаховим простором $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$ і простором n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X, Y)$ з топологією рівномірної збіжності на одиничній кулі простору X. При цьому

$$\|B \circ \Delta_n\| \leq \|B\| \leq c(n, X) \|B \circ \Delta_n\|, \tag{1}$$

де $c(n, X)$ — поляризаційна константа, $1 \leq c(n, X) \leq \frac{n^n}{n!}$.

Основним інструментом при доведенні цієї теореми є *поляризаційна формула*

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n B \circ \Delta_n \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right). \tag{2}$$

Наслідок 1.1. *Простір $\mathcal{P}(^n X, Y)$ є банаховим простором і для довільного полінома $P \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ існує єдине n-лінійне симетричне відображення $A_P \in \mathcal{L}(^n X, Y)$, яке називається асоційованим з P n-лінійним відображенням, таке, що $P = A_P \circ \Delta_n$.*

Позначимо $X^{(n)}$ простір формальних сум $\sum_i \lambda_i (x_1, \ldots, x_n)$, де $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Нехай I — підпростір в $X^{(n)}$, породжений елементами вигляду

$$(x_1, \ldots, x_k + x'_k, \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n), \tag{3}$$

$$(x_1, \ldots, \lambda x_k, \ldots, x_n) - \lambda (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

Нагадаймо, що n-тий *тензорний степінь* $\otimes^n X$ простору X визначається як $X^{(n)}/I$. При цьому $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n := (x_1, \ldots, x_n) + I$. Позначимо i_n — n-лінійне відображення з X^n в $\otimes^n X$ таке, що $i_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Визначимо

$$i_n^*(B)\left(\sum_i \lambda_i x_{i1} \otimes \cdots \otimes x_{in}\right) := \sum_i \lambda_i B(x_{i1}, \ldots, x_{in})$$

для довільної n-лінійної форми $B \in \mathcal{L}(^n X, Y)$. Відображення i_n^* є коректно визначеним і $i_n^*(B)(x_{i1} \otimes \cdots \otimes x_{in}) = B(x_{i1}, \ldots, x_{in})$.

Існує багато способів ввести топологію на тензорному добутку. Нам необхідно мати топології, породжені нормами на $\otimes^n X$, відносно яких відображення i_n та i_n^* є неперервними. Ми розглянемо норму, яка породжує найсильнішу топологію в класі локально опуклих топологій.

Позначимо $X \otimes_\pi X$ — поповнення $X \otimes X$ за нормою

$$\|w\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n} \|x_{i1}\| \ldots \|x_{in}\| : w = \sum_{i_1,\ldots,i_n} x_{i1} \otimes \cdots \otimes x_{in}\right\}.$$

Простір $X \otimes_\pi X$ називається *проективним* тензорним добутком простору X на себе, а простір $\otimes_\pi^n X := \underbrace{X \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X}_{n}$ — *проективним* тензорним степенем простору X.

Теорема 2. ([16]). *Простір $\mathcal{L}(^n X, Y)$ є ізометрично ізоморфним до простору лінійних операторів $\mathcal{L}(\otimes_\pi^n X, Y)$ з проективного тензорного добутку $\otimes_\pi^n X$ в Y.*

Симетричним тензорним степенем $\otimes_{s,\pi}^n X$ простору X називається замкнений підпростір в $\otimes_\pi^n X$, породжений векторами

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_i \in X$ і $\mathcal{S}_n$ є групою підстановок на множині $\{1, \ldots, n\}$.

Твердження 1.2. *Підпростір $\otimes_{s,\pi}^n X$ є доповнювальним в $\otimes_\pi^n X$ і відображення*

$$\nu_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n$$

є проектором.

Наслідок 1.2. *Простір $\mathcal{L}(\otimes_{s,\pi}^n X, Y)$ — ізометрично ізоморфний до простору $\mathcal{L}_s(^n X, Y)$.*

Безпосередньою перевіркою можна показати, що з поляризаційної формули і наслідку 1.2 випливає наступне співвідношення:

$$x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right).$$

Отже, кожен вектор $w \in \otimes_{s,\pi}^n X$ має зображення

$$w = \sum_{i=1}^\infty x_i^{\otimes n} = \sum_{i=1}^\infty \underbrace{x_i \otimes \cdots \otimes x_i}_{n}.$$

Покладемо

$$|||w||| := \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^n \,:\, w = \sum_{i=1}^\infty \otimes^n x_i\right\}. \tag{4}$$

Тоді для довільної форми $B \in \mathcal{L}_s(^n X, Y)$

$$|||B||| = \sup_{|||w|||=1} \|i_n^*(B)(w)\| = \|B \circ \Delta_n\|.$$

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 3. *Існує еквівалентна норма $|||\cdot|||$ на $\otimes_{s,\pi}^n X$ така, що простір лінійних операторів $\mathcal{L}((\otimes_{s,\pi}^n X, |||\cdot|||), Y)$ є ізометричним до простору поліномів $\mathcal{P}(^n X, Y)$ для кожного банахового простору Y і*

$$\|w\| \le |||w||| \le c(n, X)\|w\|, \qquad 1 \le c(n, X) \le \frac{n^n}{n!}. \tag{5}$$

Відображення $P : X \to Y$ називається поліномом (поліноміальним відображенням) степеня n, якщо $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$, де $P_0 \in Y$, $P_k \in \mathcal{P}(^k X, Y)$ і $P_n \ne 0$. Простір усіх поліномів з X в Y позначається $\mathcal{P}(X, Y)$. Ми будемо позначати простори $\mathcal{P}(^k X, \mathbb{C})$ і $\mathcal{P}(X, \mathbb{C})$ через $\mathcal{P}(^k X)$ і $\mathcal{P}(X)$ відповідно. Зауважимо, що $\mathcal{P}(X)$ є топологічною алгеброю з топологією локально опуклої прямої суми. Ми будемо використовувати позначення $\mathcal{P}(^{\le n} X, Y)$ і $\mathcal{P}(^{\le n} X)$ для просторів Y-значних і $\mathbb{C}$-значних поліномів степеня n відповідно, на X. Це — банахові простори з нормою супремум на одиничній кулі. Легко бачити, що $\mathcal{P}(^{\le n} X, Y)$ ізоморфний прямій сумі просторів $(\otimes_{s,\pi}^k X)'$, $0 \le k \le n$.

Поліном P називається поліномом *скінченного* типу, якщо P є скінченною сумою скінченних добутків лінійних неперервних функціоналів. Простір n-однорідних поліномів скінченного типу позначається $\mathcal{P}_f(^n X)$. Поповнення цього простору в рівномірній топології позначається $\mathcal{P}_c(^n X)$ і називається простором n-однорідних *апроксимовних* поліномів. Зауважимо, що простір $\mathcal{P}_c(^n X)$ ізометричний простору $\otimes_{s,\varepsilon}^n X'$. Очевидно, що всі поліноми з $\mathcal{P}_f(^n X)$ (і тільки вони [2]) є слабко неперервними. Крім того, всі поліноми з $\mathcal{P}_c(^n X)$ є слабко неперервними на обмежених множинах. Навпаки вірно, якщо X' має властивість апроксимації [5]. Для деяких просторів, таких як c_0, простір неперервних функцій на розрідженому компакті, простір Цірельсона, всі неперервні поліноми є слабко неперервними на обмежених множинах.

Підмножина Ω банахового простору X називається *скінченно відкритою*, якщо її перетин з довільним скінченновимірним афінним підпростором є відкритою множиною в цьому підпросторі.

Відображення $f : \Omega \to Y$ називається *G-аналітичним* (позначення $f \in H_G(\Omega, Y)$), якщо звуження f на $E \cap \Omega$ є аналітичним відображенням для довільного скінченновимірного афінного підпростору E (еквівалентно, для довільного одновимірного афінного підпростору $E \in X$).

Твердження 1.3. *Нехай Ω — скінченно відкрита підмножина в X і $f \in H_G(\Omega, Y)$, $a \in \Omega$.*

1. *Існує єдина послідовність k-однорідних поліномів (не обов'язково неперервних) $\widehat{d_a^k} f : X \to Y$ таких, що*

$$f(a + x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d_a^k} f(x)$$

для всіх x, що належать найбільшій радіальній підмножині $\omega(a)$ множини $\Omega - a$. Ряд праворуч збігається поточково.

2. *Поліноми $\widehat{d_a^k} f$ визначаються єдиним чином рівністю*

$$\frac{1}{k!} \widehat{d_a^k} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(a + e^{ik\theta} x) d\theta, \quad x \in \omega(a).$$

Означення 1.1. *G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині $\Omega \subset X$ із значеннями в Y, називається аналітичним (позначаємо $f \in H(\Omega, Y)$), якщо воно є неперервним.*

Зауважимо, що коли $f \in H(\Omega, Y)$ і $a \in \Omega$, то $\widehat{d_a^k} f$ є неперервні k-однорідні поліноми на X, які збігаються з похідними Фреше k-того порядку функції f в точці a. Ряд

$$f(a + x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d_a^k} f(x)$$

є рядом Тейлора функції f в околі точки a.

Твердження 1.4. *Нехай f — G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині Ω. Наступні твердження еквівалентні.*

1. *f є аналітичним.*
2. *f є локально обмеженим.*
3. *f є неперервним в деякій точці множини Ω.*
4. *Поліноми $\widehat{d_a^k} f$ є неперервними для кожного k.*

Аналітична функція f називається *цілою,* якщо вона визначена на всьому просторі X.

Нехай $f \in H(\Omega, Y)$, де Ω відкрита підмножина в X і $x \in \Omega$. *Радіус рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що $x + \lambda B \subset \Omega$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x + \lambda B$.

Теорема 4. *Радіус рівномірної збіжності функції f в точці x збігається з радіусом обмеженості f в x і якщо $f \in H(X, Y)$, то*

$$\varrho_0(f) := \left(\limsup_{n \to \infty} \|f_n\|^{1/n} \right)^{-1},$$

де $f_n = \frac{\widehat{d_x^k} f}{n!}$.

Позначимо $H_b(X)$ — простір цілих функцій *обмеженого типу,* який складається з цілих функцій на X, які є обмеженими на обмежених множинах (тобто мають нескінченний радіус обмеженості). Зауважимо, що в довільному нескінченновимірному просторі X існує комплекснозначна ціла функція f така, що $\varrho(f) < \infty$ для кожного $x \in X$. Простір $H_b(X)$ є алгеброю Фреше з топологією, породженою напівнормами

$$\|f\|_r = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| < r\},$$

де $r > 0$ — раціональні числа.

Кожен функціонал $\varphi \in H_b(X)'$ є неперервним відносно топології рівномірної збіжності на деякій кулі в X. *Радіус-функція* $R(\varphi)$ функціонала φ визначена як інфімум всіх $r > 0$ таких, що φ є неперервним в нормі рівномірної збіжності на кулі rB.

Позначимо φ_n — звуження φ на підпростір n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$. Тоді φ_n є неперервним лінійним функціоналом на $\mathcal{P}(^n X)$ і

$$\|\varphi_n\| = \sup\{\varphi(P) : P \in \mathcal{P}(^n X), \|P\| \le 1\}.$$

Теорема 5. *Радіус-функція R на $H_b(X)'$ задовольняє рівність*

$$R(\varphi) = \limsup_{n \to \infty} \|\varphi_n\|^{1/n}.$$

Теорема 6. *Нехай $\varphi_n \in \mathcal{P}(^n X)'$ для $n \ge 0$, для норм функціоналів φ_n виконується нерівність*

$$\|\varphi_n\| \le cs^n$$

для деякого $c, s > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\varphi \in H_b(X)'$, звуження якого на $\mathcal{P}(^n X)$ збігається з φ_n, $n \ge 0$.

Довільне неперервне n-лінійне відображення $B : X \times \cdots \times X \to \mathbb{C}$ може бути продовжене до неперервного, n-лінійного відображення $\widetilde{B} : X'' \times \cdots \times X'' \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$\widetilde{B}(x_1'', \dots, x_n'') = \lim_{\alpha_1} \dots \lim_{\alpha_n} B(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}),$$

де для кожного k, $1 \le k \le n$, (x_{α_k}) — це напрямленість в X, збіжна в $*$-слабкій топології до x_k''.

Нехай $P \in \mathcal{P}(^n X)$ і B є n-лінійним відображенням, асоційованим з P. Тоді *продовження Арона-Бернера* $\widetilde{P}$ полінома P визначається формулою $\widetilde{P} := \widetilde{B}(x, \dots, x)$ [1], [7].

Теорема 7. *Нехай $f \in H_b(X)$ і $f = \sum f_n$ розвинення у ряд Тейлора. Тоді існує функція $\widetilde{f} \in H_b(X'')$ яка розвивається у ряд Тейлора $\widetilde{f} = \sum \widetilde{f}_n$ і $\widetilde{f}_n$ є продовженням Арона-Бернера відповідного полінома f_n. Крім того, $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ і оператор $f \mapsto \widetilde{f}$ є гомоморфізмом алгебр Фреше $H_b(X)$ і $H_b(X'')$.*

Доведення вказаних результатів з теорії тензорних добутків, поліномів і аналітичних відображень можна знайти в [8], [9], [2].

2 Поліноми на тензорних добутках

Нам потрібно встановити деякі технічні результати стосовно поліномів, визначених на тензорному добутку банахового простору.

Твердження 2.1. *Нехай $P \in \mathcal{P}(^{km}X)$ для деяких натуральних m і k. Тоді існує єдиний поліном $P_{(m)} \in \mathcal{P}(^k \otimes^m_{s,\pi} X)$ такий, що $P_{(m)}(x^{\otimes m}) = P(x)$ і $\|P\| \leq \|P_{(m)}\|$.*

Доведення. Нехай A_P — симетрична полілінійна форма, асоційована з P. Розглянемо значення $A_P(x_1^m, \dots, x_k^m)$ для деяких $x_1, \dots, x_k \in X$. Для довільних фіксованих

$$x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k, \quad 1 \leq j \leq k, \quad A_P(x_1^m, \dots, x_j^m, \dots, x_k^m)$$

є m-однорідним поліномом від $x_j \in X$ і, отже, $A_P(x_1^m, \dots, x_j^m, \dots, x_k^m)$ може бути подано як значення деякого неперервного лінійного функціонала на $\otimes^m_{s,\pi} X$ в точці $x_j^{\otimes m}$. Оскільки це справджується для всіх $1 \leq j \leq k$, існує єдине симетричне неперервне полілінійне відображення $A_{P_{(m)}} \colon {}^m(\otimes^m_{s,\pi} X) \to \mathbb{C}$ таке, що $A_{P_{(m)}}(x_1^{\otimes m}, \dots, x_k^{\otimes m}) = A_P(x_1^m, \dots, x_k^m)$. Покладемо $P_{(m)}(x^{\otimes m}) := A_{P_{(m)}}(x^{\otimes m}, \dots, x^{\otimes m})$. Оскільки $\|x^{\otimes n}\| \leq 1$ при $\|x\| \leq 1$, то $\|P\| \leq \|P_{(m)}\|$. □

Зауважимо, що для довільного $P_{(m)} \in \mathcal{P}(^k \otimes^m_{s,\pi} X)$ ми можемо визначити єдиним чином поліном $P(x) = P_{(m)}(x^{\otimes m})$ з $\mathcal{P}(^{km}X)$. Отже відображення $P \mapsto P_{(m)}$ є ізоморфізмом банахових просторів $\mathcal{P}(^{km}X)$ і $\mathcal{P}(^k \otimes^m_{s,\pi} X)$.

Наслідок 2.1. *Простори $\otimes^{km}_{s,\pi} X$ і $\otimes^k_{s,\pi}\left(\otimes^m_{s,\pi} X\right)$ є ізоморфними.*

Доведення. Простори $\otimes^{km}_{s,\pi} X$ і $\otimes^k_{s,\pi}\left(\otimes^m_{s,\pi} X\right)$ містять щільний підпростір — алгебраїчний симетричний тензорний степінь простору X, $\otimes^{km}_s X$. З ізоморфності просторів $\mathcal{P}(^{km}X)$ і $\mathcal{P}(^k \otimes^m_{s,\pi} X)$ випливає еквівалентність їх норм. Тому спряжені норми є еквівалентними на $\otimes^{km}_s X$. Отже $\otimes^{km}_{s,\pi} X$ і $\otimes^k_{s,\pi}\left(\otimes^m_{s,\pi} X\right)$ є поповненнями простору $\otimes^{km}_s X$ відносно еквівалентних норм. Тому ці простори ізоморфні. □

Нехай w — деякий елемент з $\otimes^{km}_{s,\pi} X$. Ми будемо ототожнювати w з його образом в $\otimes^k_{s,\pi}\left(\otimes^m_{s,\pi} X\right)$ при природному ізоморфізмі. Розглянемо наступні норми для w. Нехай $\|w\|$ буде проективна тензорна норма в $\otimes^{km}_{s,\pi} X$. Тобто

$$\|w\| = \inf\Big\{ \sum_{j_1,\dots,j_n} \|x_{j_1}\| \cdots \|x_{j_n}\| \colon w = \sum_{j_1,\dots,j_n} x_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s x_{j_n} \Big\},$$

де $n = km$. Згідно з (4), ми можемо визначити

$$|||w||| := \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^{km} \colon w = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{\otimes km} \Big\}.$$

Покладемо, також,

$$\|w\|_{(m)} := \inf\Big\{ \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1} \otimes \cdots \otimes x_{ij_m} \Big\|^k \colon w = \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1} \otimes \cdots \otimes x_{ij_m} \Big)^{\otimes k} \Big\},$$

$$|||w|||_{(m)} := \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}^{\otimes m} \Big\|^k \colon w = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}^{\otimes m} \Big)^{\otimes k} \Big\}$$

і нарешті,

$$\|w\|_{(k)(m)} := \inf \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big(\sum_{i_1,\dots,i_k} \|x_{i_1 j_1}\| \cdots \|x_{i_1 j_m}\| \Big) \cdots \Big(\sum_{i_1,\dots,i_k} \|x_{i_k j_1}\| \cdots \|x_{i_k j_m}\| \Big),$$

де інфімум береться по всіх зображеннях

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big(\sum_{i_1,\dots,i_k} x_{i_1 j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s x_{i_1 j_m} \Big) \otimes_s \cdots \otimes_s \Big(\sum_{i_1,\dots,i_k} x_{i_k j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s x_{i_k j_m} \Big). \tag{6}$$

Зауважимо, що зображення

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}^{\otimes m} \Big)^{\otimes k}$$

є частковим випадком зображення

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1} \otimes \cdots \otimes x_{ij_m} \Big)^{\otimes k}. \tag{7}$$

Тому $\|w\|_{(m)} \leq |||w|||_{(m)}$. Нехай

$$u_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1} \otimes \cdots \otimes x_{ij_m}. \tag{8}$$

З поляризаційної нерівності (5) маємо

$$\|u_j\| = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{ij_1}\| \cdots \|x_{ij_m}\| \geq \frac{1}{c(m,X)} |||u_j|||,$$

де інфімум береться по всіх зображеннях (8). Порівнюючи формули (7) і (8), ми бачимо, що $\|w\|_{(m)} \geq 1/[c(m,X)]^k |||w|||_{(m)}$ або

$$\|w\|_{(m)} \leq |||w|||_{(m)} \leq [c(m,X)]^k \|w\|_{(m)}. \tag{9}$$

Зауважимо, також, що зображення

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_m} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij_1} \otimes \cdots \otimes x_{ij_m}\Big)^{\otimes k} \tag{10}$$

є частковим випадком зображення (6). Тому

$$\|w\|_{(k)(m)} \le \|w\|_{(m)} \le c(k, \otimes_{s,\pi}^m)\|w\|_{(k)(m)}. \tag{11}$$

З іншого боку, зображення (6) є частковим випадком зображення

$$w = \sum_{j_1,\dots,j_n} x_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s x_{j_n}.$$

Отже,

$$\|w\| \le \|w\|_{(k)(m)} \le s_{k,m}\|w\| \tag{12}$$

для деякої константи $s_{k,m}$.

Порівнюючи формули (9),(11),(12) і беручи до уваги, що

$$\|w\| \le |||w||| \le c(km, X)\|w\|$$

маємо наступні нерівності:

$$|||w||| \le c(km, X)|||w|||_{(m)}.$$

З твердження 2.1 випливає, що $|||w|||_{(m)} \le |||w|||$. Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 8. *Нехай $w \in \otimes_{s,\pi}^{km} X$ і $P \in \mathcal{P}(^{km}X)$. Тоді*

$$|||w|||_{(m)} \le |||w||| \le c(km, X)|||w|||_{(m)}$$

і

$$\|P\| \le \|P_{(m)}\| \le c(km, X)\|P\|.$$

Нехай тепер $n = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m$ для деяких $k_1, \dots, k_m$ і P — n-однорідний поліном. Означимо відображення $B^P_{k_1,\dots,k_m}$ на декартовому добутку

$$X \times \otimes_{s,\pi}^2 X \times \cdots \times \otimes_{s,\pi}^m X$$

так, що $B^P_{k_1,\dots,k_m}(x_1, x_2^{\otimes 2}, \dots, x_j^{\otimes j}, \dots, x_m^{\otimes m})$ є k_j-однорідним поліномом від $x_j^{\otimes j}$ для фіксованих $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$ для кожного $1 \le j \le m$ і

$$B^P_{k_1,\dots,k_m}(x, x^{\otimes 2}, \dots, x^{\otimes m}) = P(x). \tag{13}$$

Як у твердженні 2.1, відображення $B^P_{k_1,\dots,k_m}$ коректно визначене і

$$\|B^P_{k_1,\dots,k_m}\| \ge \|P\|.$$

Нехай $w \in \otimes_{s,\pi}^n X$. Тоді за теоремою 8,

$$\begin{aligned}\|w\|_{k_1,\dots,k_m} &:= \inf \Big(\textstyle\sum_{i_1=1}^{\infty} \|x_{i_1}\|\Big)^{k_1} \Big(\sum_{i_2=1}^{\infty} \|x_{i_2}\|^2\Big)^{k_2} \cdots \Big(\sum_{i_m=1}^{\infty} \|x_{i_m}\|^m\Big)^{k_m} \\ &\le c(k_1, X)c(2k_2, X)\cdots c(mk_m, X)\|w\|,\end{aligned}$$

де інфімум береться по всіх зображеннях

$$w = \Big(\sum_{i_1=1}^{\infty} x_{i_1}\Big)^{\otimes k_1} \Big(\sum_{i_2=1}^{\infty} x_{i_2}^{\otimes 2}\Big)^{\otimes k_2} \cdots \Big(\sum_{i_m=1}^{\infty} x_{i_m}^{\otimes m}\Big)^{\otimes k_m}.$$

Таким чином, ми довели наступний наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $P \in \mathcal{P}(^nX)$ і $k_1 + \cdots + k_m = m$. Тоді*

$$\|P\| \le \|B^P_{k_1,\dots,k_m}\| \le c(k_1, X)c(2k_2, X)\cdots c(mk_m, X)\|P\|.$$

3 Структура множини максимальних ідеалів алгебри $H_b(X)$

Позначимо $A_n(X)$ замикання в рівномірній топології на обмежених множинах алгебри, породженої поліномами з $\mathcal{P}(^{\le n}X)$. Очевидно, що $A_1(X) \cap \mathcal{P}(^nX) = \mathcal{P}_c(^nX)$.

Нагадаймо, що радіус-функція $R(\varphi)$ функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ визначена як інфімум всіх $r > 0$ таких, що φ є неперервним в нормі рівномірної збіжності на кулі з центром в нулі і радіуса r. Згідно з [2], радіус-функцію можна обчислити за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{1/n},$$

де $\varphi_n = \pi_n(\varphi)$ — звуження φ на простір n-однорідних поліномів. Ми будемо використовувати позначення M_b для множини характерів (які завжди можна утотожнити із замкненими максимальними ідеалами) алгебри $H_b(X)$

Лема 3.1. ([24]) *Нехай $\varphi \in H_b(X)'$. Припустимо, що для деякого фіксованого $m > 0$, $\varphi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^mX) \cap A_{m-1}(X)$ і $\varphi_m \ne 0$. Тоді існує функціонал $\psi \in M_b$ такий, що $\psi_k = 0$ для $k < m$ і $\psi_m = \varphi_m$. Крім цього для радіус-функції виконується рівність $R(\psi) = \|\varphi_m\|^{1/m}$.*

Для довільного фіксованого елемента $x \in X$, оператор зсуву τ_x визначається на $H_b(X)$ рівністю

$$(\tau_x f)(y) = f(y + x), \qquad f \in H_b(X).$$

Відомо, що $\tau_x f \in H_b(X)$ і для довільного фіксованого функціонала $\varphi \in H_b(X)'$ функція

$$x \longrightarrow \varphi(\tau_x f), \qquad x \in X,$$

належить $H_b(X)$ (див. [2]).

Для довільних $\varphi, \theta \in H_b(X)'$ операція згортки $\varphi * \theta$ в $H_b(X)$ визначається рівністю

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(\theta(\tau_x f)), \qquad f \in H_b(X).$$

Нехай $\varphi, \theta \in M_b$. Згідно з [2], існує напрямленість $(x_\alpha), (y_\beta) \subset X$ така, що

$$\varphi(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha), \qquad \theta(P) = \lim_\beta P(y_\beta)$$

для кожного полінома P. Іншими словами, $x_\alpha \to \varphi$ і $y_\beta \to \theta$ в слабко поліноміальній топології. Таким чином, у цьому випадку ми можемо записати:

$$(\varphi * \theta)(P) = \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha + y_\beta)$$

для кожного полінома P. Зауважимо, що M_b є напівгрупою відносно операції згортки. Позначимо для скорочення $\varphi_1 * \cdots * \varphi_n$ через $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \varphi_k$.

Нехай I_k — мінімальний замкнений ідеал в $H_b(X)$, породжений всіма m-однорідними поліномами, $0 < m \leq k$. Очевидно, що I_k є власним ідеалом (не містить одиниці) і тому міститься в деякому максимальному замкненому ідеалі (див. [20]). Позначимо

$$\Phi_k := \{\varphi \in M_b \ : \ \ker \varphi \supset I_k\}.$$

При цьому будемо вважати, що $\Phi_0 := M_b$. Функціонал $\delta(0)$, що є значенням в нулі, належить Φ_k для кожного k.

Наслідок 3.1. ([24]) *Якщо $A_m(X) \neq A_{m-1}(X)$ для деякого $m > 1$, тоді існує комплексний гомоморфізм $\psi \in \Phi_{m-1}$ такий, що $\psi \notin \Phi_m$.*

Зауважимо, що $A_1(c_0) = A_n(c_0)$ для кожного n, але $A_k(\ell_p) = A_m(\ell_p)$ для $k \neq m$ тоді і тільки тоді, коли $k < p$ і $m < p$ [15].

Для послідовності характерів $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset M_b$ таких, що $\varphi_n \in \Phi_{n-1}$, нескінченна згортка $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ лінійний мультиплікативних функціонал на алгебрі поліномів $\mathcal{P}(X)$ такий, що $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P) = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{k} \varphi_n(P)$ для кожного $P \in \mathcal{P}(^kX)$ для довільного натурального k. Цей мультиплікативних функціонал єдиним чином визначає деякий характер з M_b (який ми будемо позначати тим самим символом $\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$) якщо він неперервний.

Як вже було відзначено, оператор δ відображає X в M_b, $\delta(x)(f) = f(x)$. Нехай оператор $\widetilde{\delta}$ є продовженням δ на X'', тобто $\widetilde{\delta}(x'')(f) = \widetilde{f}(x'')$ для кожного $x'' \in X''$.

Теорема 9. ([24]) *Існують послідовності спряжених просторів $(X_n)_{n=1}^\infty$ і відображень $\delta^{(n)} : X_n \to M_b$ такі, що $X_1 = X''$, $X_n = \mathcal{P}(^nX)' \cap I_{n-1}^\perp$, $\delta^{(1)} = \widetilde{\delta}$ і довільний комплексний гомоморфізм $\varphi \in M_b$ має зображення*

$$\varphi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n) \tag{14}$$

для деякої послідовності $u_n \in X_n$.

Ми будемо позначати $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$ реалізацію M_b у вигляді простору послідовностей $\mathfrak{u} = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, які породжують комплексні гомоморфізми на $H_b(X)$ за формулою (14).

Для спрощення позначень ми будемо писати $\widehat{P}(u_1, \ldots, u_m)$ замість

$$\widehat{P}(u_1, \ldots, u_m, 0, 0, \ldots), \qquad u_j \in X_j.$$

Теорема 10. *Нехай P — деякий n-однорідний поліном. Для кожного фіксованого m, натуральних $k_1, \ldots, k_m$ таких, що $k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = n$ існує відображення*

$$\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m} : {}^{k_1}X_1 \times \cdots \times {}^{k_m}X_m \to \mathbb{C}$$

таке, що для кожного $1 \leq j \leq n$, $\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_m)$ є k_j-однорідним поліномом від змінної $u_j \in X_j$ при інших фіксованих $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_m$ і

$$\widehat{P}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_m).$$

Крім того,

$$\|\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}\| \leq c(k_1, X)c(2k_2, X)\cdots c(mk_m, X)\|P\|.$$

Доведення. Для $m = 1$ твердження теореми є очевидним. Припустимо, що воно виконується для $m-1$. Тоді

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(u_1, \ldots, u_m) &= \mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m} \delta^{(j)}(u_j)P = \Big[\Big(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \delta^{(j)}(u_j)\Big) * \delta^{(m)}(u_m)\Big](P) \\
&= \delta^{(m)}(u_m)\Big(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \delta^{(j)}(u_j)\tau_x(P)\Big) \\
&= \delta^{(m)}(u_m)\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k_1+\cdots+(m-1)k_{m-1}=n-i} \widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1}) \\
&+ P(x)\Big),
\end{aligned}$$

де $P_i(z) = \binom{n-i}{i} A_P(z^{n-i}, x^i)$ є $n-i$-однорідним поліномом для довільного x. Оскільки $\tau_x(P)(z) = \sum_i P_i(z)$ і функціонал $\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \delta^{(j)}(u_j)$ є лінійним (від P), $\widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ є i-однорідним поліномом від змінної x для кожного i, де елементи $u_1, \ldots, u_{m-1}$ зафіксовані. За означенням $\delta^m(u_m)$,

$$\delta^m(u_m)\Big(\widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})\Big)$$

є i/m-однорідним поліномом, якщо i/m — натуральне і нулем, в іншому випадку. Аналогічно, $\delta^m(u_m)(P)$ є n/m-однорідним поліномом якщо n/m — натуральне і нулем, в іншому випадку. Отже, якщо $i = k_m m$, то

$$\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_m) = \delta^m(u_m)\Big(\widetilde{B}^{P_i}_{k_1,\ldots,k_{m-1}}(u_1, \ldots, u_{m-1})\Big)$$

і якщо $n = k_m m$, то

$$\widetilde{B}^P_{0,\ldots,0,k_m}(u_1, \ldots, u_m) = \delta^m(u_m)(P).$$

Оскільки X_j є підпростором $(\otimes^j_{s,\pi}X)''$, то для кожного $u_j \in X_j$ існує напрямленість $(w^j_{\alpha_j}) \subset \otimes^j_{s,\pi}X$ така, що $\|w^j_{\alpha_j}\| \leq \|u_j\|$ і $w^j_{\alpha_j} \to u_j$ в $*$-слабкій топології простору $(\otimes^j_{s,\pi}X)''$. Таким чином,

$$\widetilde{B}^P_{k_1,\ldots,k_m}(u_1, \ldots, u_m) = \lim_{\alpha_1} \ldots \lim_{\alpha_m} B^P_{k_1,\ldots,k_m}(w^1_{\alpha_1}, \ldots, w^m_{\alpha_m}),$$

де $B^P_{k_1,\dots,k_m}$ визначено формулою (13). Згідно з наслідком 2.2,

$$\left\|\widetilde{B}^P_{k_1,\dots,k_m}\right\| = \left\|B^P_{k_1,\dots,k_m}\right\| \le c(k_1,X)c(2k_2,X)\cdots c(mk_m,X)\|P\|.$$

□

Для довільного натурального n позначимо $p(n)$ — число додатніх розв'язків діофантового рівняння

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n.$$

З комбінаторики добре відомо, що $p(n)$ дорівнює числу всіх розбиттів n на натуральні доданки і асимптотично

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Теорема 11. *Нехай* $\mathfrak{u} = (u_k)_{k=1}^\infty$ *— деяка послідовність елементів* $u_k \in X_k$. *Функціонал* $\mathfrak{u}$ *належить* $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$, *тобто,* $\varphi = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k) \in M_b$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sup_k \|u_k\|^{1/k} < \infty$. *В цьому випадку*

$$\sup_k \|u_k\|^{1/k} \le R(\varphi) \le e \sup_k \|u_k\|^{1/k}. \tag{16}$$

Доведення. Нехай $\sup_k \|u_k\|^{1/k} = r < \infty$ для деякого додатного r. Тоді $\|u_k\| \le r^k$. Для довільного $P \in \mathcal{P}(^nX)$, $\|P\| = 1$ маємо

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(P)\| &= \|\varphi(P)\| = \|\widehat{P}(u_1,\dots,u_n)\| \\
&= \Big\| \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n} \widetilde{B}^P_{k_1,\dots,k_m}(u_1,\dots,u_n) \Big\| \\
&\le \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \|\widetilde{B}^P_{k_1,\dots,k_m}(u_1,\dots,u_n)\| \\
&\le m_n \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \|u_1\|^{k_1}\cdots\|u_n\|^{k_n},
\end{aligned}$$

де

$$m_n = \max_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} [c(k_1,X)c(2k_2,X)\cdots c(mk_m,X)].$$

Зауважимо, що

$$m_n \le \max_{s_1+\cdots+s_n=n} \frac{s_1^{s_1}\cdots s_n^{s_n}}{s_1!\cdots s_n!}.$$

Згідно з асимптотичною, формулою Стірленга,

$$\limsup_{n\to\infty} m_n^{1/n} \le e.$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
R(\varphi) &= \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|^{1/n} \\
&\le e \limsup_{n\to\infty} (p(n) r^{k_1+2k_2+\cdots+nk_n})^{1/n} = er \limsup_{n\to\infty} (p(n))^{1/n}.
\end{aligned}$$

Використовуючи асимптотичну формулу (15), отримуємо

$$R(\varphi) \le er = e \sup_k \|u_k\|^{1/k} < \infty.$$

Тому $\varphi \in M_b$.

З іншого боку, $\|u_k\| \le \|\varphi_{km}\|$ для кожного натурального m. Отже

$$\sup_k \|u_k\|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} \|\varphi_k\|^{1/k} = R(\varphi).$$

□

Для довільного елемента $\mathfrak{u} = (u_k)_{k=1}^\infty \in \widehat{\mathbb{X}}^\infty$ позначимо $\nu(\mathfrak{u}) := \sup \|u_k\|^{1/k}$.

Теорема 12. *Множина* $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$ *є лінійним простором відносно операцій* $(u_k)_{k=1}^\infty + (v_k)_{k=1}^\infty := (u_k+v_k)_{k=1}^\infty$ *і* $\lambda(u_k)_{k=1}^\infty := (\lambda u_k)_{k=1}^\infty$ *та функція* $\rho(\mathfrak{u},\mathfrak{v}) := \nu(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})$ *є метрикою, інваріантною відносно трансляцій на* $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$.

Доведення. Оскільки

$$\|u_k + v_k\|^{1/k} \le (\|u_k\| + \|v_k\|)^{1/k} \le \|u_k\|^{1/k} + \|v_k\|^{1/k},$$

то

$$\sup_k \|u_k + v_k\|^{1/k} \le \sup_k(\|u_k\|^{1/k} + \|v_k\|^{1/k}) \le \sup_k \|u_k\|^{1/k} + \sup_j \|v_j\|^{1/j}.$$

Тому

$$\nu(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) \le \nu(\mathfrak{u}) + \nu(\mathfrak{v}). \tag{17}$$

Крім того, якщо $|\lambda| \ge 1$, то

$$\nu(\lambda\mathfrak{u}) = \sup_k \|\lambda u_k\|^{1/k} \le \lambda \sup_k \|u_k\|^{1/k} = \lambda\nu(\mathfrak{u})$$

і якщо $|\lambda| \le 1$, то

$$\nu(\lambda\mathfrak{u}) \le \nu(\mathfrak{u}).$$

Тому $\widehat{\mathbb{X}}^\infty$ — лінійний простір. Поклавши у (17) $\mathfrak{u}-\mathfrak{w}$ замість $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{w}-\mathfrak{v}$ замість $\mathfrak{v}$ отримаємо нерівність трикутника для ρ:

$$\rho(\mathfrak{u},\mathfrak{v}) \le \rho(\mathfrak{u},\mathfrak{w}) + \rho(\mathfrak{w},\mathfrak{v}).$$

Отже ρ — метрика. □

Зауважимо, що $(\widehat{\mathbb{X}}^\infty,\rho)$ не є топологічним лінійним простором тому, що множення на константу не є неперервною операцією. Справді, нехай $\nu(u_k) = a^k$, $a > 0$. Тоді $\mathfrak{u}(u_1,u_2,\dots) \in (\widehat{\mathbb{X}}^\infty,\rho)$ і для кожного $0 < \lambda \le 1$, $\nu(\lambda\mathfrak{u}) = a$, але $\nu(\lambda\mathfrak{u}) = 0$ при $\lambda = 0$.

4 Алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору

У цьому підрозділі ми досліджуємо множину максимальних ідеалів банахових алгебр аналітичних функцій на одиничній кулі B комплексного банахового простору X. Ми будемо розглядати наступні рівномірні алгебри: $H^\infty(B)$ — алгебра обмежених аналітичних функцій на B, $H^\infty_{uc}(B)$ — алгебра обмежених аналітичних функцій на B, які є рівномірно неперервні на $\overline{B}$, $H^\infty_c(B)$ — алгебра обмежених аналітичних функцій на B, неперервних на $\overline{B}$. Очевидно, що

$$H_b(X) \subset H^\infty_{uc}(B) \subset H^\infty_c(B) \subset H^\infty(B).$$

В [2] показано, що якщо X — нескінченновимірний банахів простір, то всі включення є власними.

Позначимо M_{uc}, M_c і M^∞ — множину максимальних ідеалів алгебр $H^\infty_{uc}(B)$, $H^\infty_c(B)$ і $H^\infty(B)$ відповідно. Згідно з [2],

$$M_{uc} = \{\varphi \in M_b \ : \ R(\varphi) \leq 1\}. \tag{18}$$

Крім того, існує природна проекція $\varrho : M^\infty \to M_b$, що є звуженням функціоналів з M^∞ на $H_b(X)$, яка є біекцією на множині тих $\varphi \in M^\infty$, для яких $R(\varphi) < 1$. Зокрема

$$M_{uc} \subset M_c \subset M^\infty. \tag{19}$$

Твердження 4.1. *Множини M_{uc}, M_c і M^∞ містять замкнені одиничні кулі просторів X_n для кожного n.*

Доведення. Згідно з лемою 3.1 для довільного $u_k \in X_k$, $R(u_k) \leq 1$ тоді і тільки тоді, коли $\|u_k\| \leq 1$. Тому, згідно з рівністю (18), одиничні кулі просторів X_n містяться в M_{uc}. З вкладень (19) випливає, що вони містяться в M_c і M^∞. □

Нагадаємо, що згідно з теоремою 9, X_n — спряжений простір до деякого простору W_n.

Лема 4.1. *Нехай $P_1, \ldots, P_m \in W_n$, $|P_k(x)| < 1$ для $\|x\| < 1$, $k = 1, \ldots, m$ і h — деяка функція з $H^\infty(\Delta^m)$, $\|h\| < a$, де Δ^m — одиничний диск в $\mathbb{C}^m$. Тоді існує функція $f \in H^\infty(B)$ така, що звуження $\widehat{f}$ на X_n збігається з $h(P_1, \ldots, P_m)$ і $\|\widehat{f}\| < a$.*

Доведення. Оскільки простір $W_n = \mathcal{P}(^nX)/(I_{n-1} \cap \mathcal{P}(^nX))$, то ми можемо розглядати P_k як класи еквівалентності в просторі n-однорідних поліномів. Нехай Q_k — деякі представники елементів P_k в просторі $\mathcal{P}(^nX)$. Покладемо

$$f(x) := h(Q_1(x), \ldots, Q_m(x)).$$

Внаслідок відкритості фактор-відображення ми можемо вибрати представники Q_k так, що $\|Q_k\| < 1$ і $\|f\| < a$. Тому $(Q_1(x), \ldots, Q_m(x)) \in \Delta^m$ і $\|f\| \leq \|h\| < a$. Отже $f \in H^\infty(B)$. За побудовою, звуження $\widehat{f}$ на X_n збігається з $h(P_1, \ldots, P_m)$. □

Скажемо, що послідовність $(z_j) \subset M^\infty$ є *інтерполюючою послідовністю* для $H^\infty(B)$, якщо для довільної обмеженої послідовності $(\alpha_j) \in \ell_\infty$ існує функція $f \in H^\infty(B)$ така, що $\widehat{f}(z_j) = \alpha_j$, $1 \leq j \leq \infty$.

У [2, Теорема 10.5] доведено, що кожна послідовність з одиничної кулі X'', норма елементів якої збігається до одиниці, містить інтерполюючу підпослідовність для алгебри $H^\infty(B)$. Наступна теорема узагальнює цей результат, використовуючи аналогічну схему доведення.

Теорема 13. *Нехай (z_j) така послідовність з X_n, що $\|z_j\| \to 1$ при $j \to \infty$. Тоді (z_j) містить інтерполюючу підпослідовність для $H^\infty(B)$.*

Доведення. Переходячи, якщо потрібно, до підпослідовності в (z_j), виберемо послідовності $(P_j) \subset W_n$, $\|P_j\| < 1$, $0 < P_j(z_j)$, і r_j, $0 < r_j < 1$ та послідовність конформних відображень одиничного диску комплексного простору в праву півплощину (Ψ_j) так, що

$$\Psi_j(P_j(z_j)^j) = j, \qquad 0 < \Psi_j(0) < 1, \tag{20}$$

$r_j \to 1$ при $j \to \infty$,

$$\Psi_j(P_j(x)^j) < 1/2^j \text{ для довільного } x \in X_n, \ \|x\| < r_j. \tag{21}$$

Існування таких послідовностей випливає з того, що кожне конформне відображення Ψ_j повністю визначається значеннями в двох точках. Будемо брати r_j так, щоб

$$\sup_{\|x\| < r_j} P_j(x)^j < P_j(z_j)^j$$

і визначати Ψ_j з умов (20), (21).

Покладемо $h_j = \Psi_j \circ P_j^j$. Тоді $|h_j(x)| < 1/2^j$ для довільного $x \in X_n$, $\|x\| < r_j$. Визначимо

$$g_m = \frac{h_1 + \cdots + h_m - 1}{h_1 + \cdots + h_m + 1}.$$

Тоді послідовність функцій g_m обмежена за модулем одиницею і рівномірно збігається на довільній кулі з центром в нулі радіуса r, $0 < r < 1$ в X^n до деякої функції g. Згідно з лемою 4.1, функції g_m можна продовжити до деяких функцій $f_m \in H^\infty(B)$, $\|f_m\| < 1$, при цьому, внаслідок відкритості відображення $f_m \mapsto g_m$, послідовність f_m можна вибрати збіжною. Внаслідок повноти $f_m \in H^\infty(B)$ в топології рівномірної збіжності, послідовність (f_m) прямує до деякої функції $f \in H^\infty(B)$. Отже $|f(z_j)| \leq 1$ для $j \geq 1$ і $f(z_j) \to 1$ при $j \to 1$. Нехай z_{j_k} — підпослідовність в z_j така, що $f(z_{j_k})$ — інтерполююча послідовність в $H^\infty(\Delta)$, де Δ — одиничний диск в $\mathbb{C}$. Існування такої послідовності випливає з відомої теореми Карлесона про інтерполяцію [18]. Тоді z_{j_k} — інтерполююча послідовність в $H^\infty(B)$. □

Позначимо через $^n\pi$ неперервний проектор з $\widehat{\mathbb{X}}^\infty = M_b$ на X_n. З формули (18) видно, що $^n\pi(M^\infty_{uc}) = B_{X_n}$, де B_{X_n} — одинична куля в X_n. Оскільки простір поліномів є спільним для обох алгебр $H^\infty_{uc}(B)$ та $H^\infty(B)$, і алгебра $H^\infty_{uc}(B)$ є рівномірною границею поліномів, то $^n\pi(M^\infty) \subset {}^n\pi(M_{uc})$. З іншого боку, як було вже відзначено, множини M^∞ і

M_{uc} перетинаються по множині $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$. Тому $^n\pi(M^\infty) \supset B_{X_n}$. Крім того, на множині $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$ топологія Гельфанда $H^\infty(B)$ і $H^\infty_{uc}(B)$ збігаються і ця топологія збігається з $*$-слабкою на B_{X_n}. Тому $^n\pi$ є неперервним відображенням з $\{\varphi \in M^\infty : R(\varphi) < 1\}$ в B_{X_n} із $*$-слабкою топологією. Оскільки неперервний образ компакта — компакт і $\overline{B}_{X_n}$ — компакт в $*$-слабкій топології, то $^n\pi(M^\infty) = \overline{B}_{X_n}$.

Нехай $z \in \overline{B}_{X_n}$. Наростом множини M^∞ над точкою z будемо називати множину

$$M^\infty_z := (^n\pi)^{-1}(\{z\}).$$

Наступна теорема узагальнює результат із роботи [2], доведений для випадку $\overline{B}_{X_1} = \overline{B}_{X''}$.

Теорема 14. *Нехай X — нескінченновимірний банахів простір і для деякого n X_n є нетривіальним нескінченновимірним простором і відповідний йому простір W_n є спряженим. Тоді над кожною точкою $z \in X_n$, $\|z\| = 1$ лежить наріст M^∞_z, який містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. Якщо простір X_n — нескінченновимірний, тоді над кожною точкою $z \in \overline{B}_{X_n}$ лежить наріст M^∞_z, який містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай $\{z_j\}$ — послідовність в B_{X_n} така, що $z_j \to z$ в $*$-слабкій топології простору X_n і $\|z_j\| \to 1$ при $j \to \infty$. Якщо $\|z\| = 1$, то достатньо покласти $z_j = r_j z$ для числової послідовності $0 < r_j < 1$, $r_j \to 1$. Якщо $\|z\| < 1$, то в умовах теореми така послідовність існує [10]. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати за теоремою 13, що послідовність z_j — інтерполююча для $H^\infty(B)$. Тому замикання підмножини $\delta^{(n)}(z_j)$ в M^∞ гомеоморфне до $\beta(\mathbb{N})$. Оскільки z_j прямує до z в $*$-слабкій топології і $^n\pi$ — неперервне відображення з M^∞ в B_{X_n} із $*$-слабкою топологією, то $^n\pi$ відображає всі граничні точки послідовності (z_j) в z. Отже, наріст над точкою z містить $\beta(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$. □

Існування наросту, який містить $\beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$, на множинні M^∞ зумовлене тим, що $H^\infty(B)$ містить замкнені підалгебри, ізоморфні до ℓ_∞ (які є завжди доповнювальними внаслідок ін'єтивності ℓ_∞). Відмінність від скінченновимірного випадку полягає в тому, що нарости знаходяться не тільки над точками межі, а й над внутрішніми точками множини одиничних куль B_{X_n}.

Література

1. R.M. Aron and P.D. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3–24.
2. R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.
3. R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic funtions*, Can. J. Math. **47** (1995), 673–683.
4. R.M. Aron, P. Galindo, D. Garcia and M. Maestre, *Regularity and algebras of analytic function in infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 543–559.
5. R.M. Aron and J.B. Prolla, *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 195–216.

6. T.K. Carne, B. Cole and T.W. Gamelin, *A uniform algebra of analytic functions on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 639–659.
7. A.M. Davie and T.W. Gamelin, *A theorem on polynomial-star approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351–356.
8. S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Mathematics Studies, vol. 57, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.
9. S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
10. J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
11. T.W. Gamelin, *Uniform algebras,* 2nd ed., Chelsea, New York, 1984.
12. T.W. Gamelin, *Analytic functions on Banach spaces*, in Complex Function Theory, Ed. Gauthier and Sabidussi, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994, 187–223.
13. D. García, M.L. Lourenço, M. Maestre and L.A. Moraes, *The spectrum of analytic mappings of bounded type*, J. Math. Anal. Appl. **245** (2000), 447–470.
14. D. García, M.L. Lourenço, L.A. Moraes and O.W. Paques, *The spectra of some algebras of analytic mappings*, Indag. Mathem. **10** (1999), 393–406.
15. R. Gonzalo, *Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces*, J. Math. Anal. App. **202** (1996), 379–397.
16. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaries*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).
17. C.P. Gupta, *On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space*, Notas de Matemática, vol. 37, IMPA, Rio de Janeiro, 1968.
18. L. Karleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. Math. **76** (1962), 547–559.
19. A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics*, Mathematics Studies, vol. 124, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 535 p.
20. J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.
21. J. Mujica, *Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space*, Archiv der Mathematik **76** (2001), 292–298.
22. L. Nachbin, *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Erd. der Math., vol. 47, Springer-Verlag, New York, 1969.
23. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
24. A. Zagorodnyuk, *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559–2569.
25. A. Zagorodnyuk, *Spectra of Algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces,* Contemporary Math. **435** (2007), 381–394.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 2.12.2008

Zagorodnyuk A.V. *Algebras of analytic functions on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 15–34.

The paper contains a survey of the most important results about structures of spectra of algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces and some new results in this area. Also, we have some applications to interpolations in algebras of analytic functions on unit balls of Banach spaces.

Загороднюк А.В. *Алгебры аналитических функций на банаховых пространствах // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 15–34.

В работе сделано обзор основных результатов о структуре множества максимальных идеалов алгебры целых аналитических функций ограниченного типа на банаховом пространстве и доказано некоторые новые результаты в этой области. Получены применения к интерполяции в алгебрах аналитических функций в единичном шаре банахового пространства.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 512.538

Заторський Р.А., Малярчук О.Р.

НЕСКІНЧЕННІ ЛІНІЙНІ РЕКУРЕНТНІ РІВНЯННЯ ТА ПАРАПЕРМАНЕНТИ

Заторський Р.А., Малярчук О.Р. *Нескінченні лінійні рекурентні рівняння та параперманенти // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 35–46.

При допомозі параперманентів трикутних матриць досліджуються нескінченні лінійні рекурентні рівняння.

Вступ

Незважаючи на широкі застосування рекурсій в різних областях математики, вони досі погано вивчені. Винятком, можливо, є лінійні однорідні та неоднорідні рекурентні співвідношення із сталими коефіцієнтами. Для них доведено ряд загальних теорем, зміст і доведення яких, з відомих причин, є аналогами відповідних теорем з теорії лінійних однорідних та неоднорідних систем рівнянь із сталими коефіцієнтами та теорії однорідних та неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Ці теореми стали класичними і широко використовуються. Проте, навіть для лінійних однорідних рекурентних рівнянь із змінними коефіцієнтами, загальні методи їх розв'язання та дослідження досі відсутні. Ще гірше вивчені нелінійні рекурсії. Тут взагалі відсутні загальні підходи до їх вивчення.

В [1] лінійні рекурентні рівняння k-го порядку досліджуються при допомозі апарату параперманентів трикутних матриць. Такий підхід дозволяє знайти розв'язки рекурентних рівнянь, уникаючи розв'язування відповідних характеристичних рівнянь. Деякі результати цієї роботи доповідалися на Міжнародній математичній конференції, присвяченій сторіччю від початку роботи Д.О. Граве у Київському університеті [2].

Метою цієї статті є застосування апарату параперманентів та парадетермінантів трикутних матриць [3] до розв'язання нескінченних лінійних рекурентних рівнянь, які часто виникають у комбінаторному аналізі [4].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

1 Попередні відомості

Справедлива наступна теорема [1], яка істотно доповнює теорему Стенлі (див. [6], стор. 301).

Теорема 1. *Нехай задано два вектори*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *наступні три рівності рівносильні:*

1. Лінійне рекурентне рівняння $k-$*го порядку*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_k u_{n-k}, \; n = k, k+1, k+2, \ldots \tag{1}$$

із початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2, \; \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}.$$

2.

$$u_n = pper(A_n) = \left[\begin{array}{cccccccc} a_1 c_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 c_2 & & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \cdots & a_1 c_{k-1} & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array} \right]_n,$$

тут поправки c_i *визначаються із рівностей*

$$c_i = b_i \left(\sum_{s=1}^{i} a_s b_{i-s} \right)^{-1} = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \cdots + a_2 b_{i-2} + a_1 b_{i-1}},$$

де $i = 1, \ldots, k-1$;

3.

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i = \frac{1 + b_1 \left(1 - \frac{1}{c_1}\right) z^1 + b_2 \left(1 - \frac{1}{c_2}\right) z^2 + \ldots + b_{k-1} \left(1 - \frac{1}{c_{k-1}}\right) z^{k-1}}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k}.$$

$$u_0 = 1, \; u_i = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \cdots & a_1 \end{array} \right]_i, \; i = 1, \ldots, k-1. \tag{2}$$

Початкові умови (2) для рекурентного рівняння (1) назвемо *нормальними початковими умовами*, а послідовність, що генерується рекурентним співвідношенням — *нормальною послідовністю*.

Наслідок 1.1. *Нехай задано два вектори*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}),$$

де $b_i = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \cdots & a_1 \end{array} \right]_i, \; i = 1, \ldots, k-1.$

Для нормальної послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *наступні три рівності рівносильні:*

1. Лінійне рекурентне рівняння $k-$*го порядку*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_k u_{n-k}, \; n = k, k+1, k+2, \ldots$$

із початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2, \; \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}.$$

2.

$$u_n = \left[\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array} \right]_n, \; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

3.

$$\frac{1}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i.$$

2 Нескінченні лінійні рекурентні рівняння

У цьому пункті ми розглянемо нескінченновимірний аналог наслідку 1.1 теореми 1 та за даною числовою послідовністю побудуємо лінійне рекурентне рівняння, яке ця послідовність задовольняє.

Наслідок 1.1 справедливий також на випадок нескінченновимірного вектора

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

тобто справедлива наступна теорема:

Теорема 2. *Нехай маємо вектор*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ наступні рівності рівносильні:

1.

$$u_0 = 1,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

2.

$$u_0 = 1,\ u_1 = [a_1],\ u_2 = \begin{bmatrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}, \ldots,$$

3.

$$\frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i.$$

Доведення. Рівносильність рівностей п.1 і п.2 стає очевидною після послідовного розкладу параперманентів із п.2 за елементами останнього рядка.

Рівносильність рівностей першого і третього пунктів випливає із рівності

$$(1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (u_i - a_1 u_{i-1} - a_2 u_{i-2} - \ldots - a_i u_0) z^i,$$

яка можлива лише тоді, коли виконуються рівності

$$u_i - a_1 u_{i-1} - a_2 u_{i-2} - \ldots - a_i u_0 = 0,\ i = 1, 2, \ldots.$$

$\square$

Зауваження 2.1. *Матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & a_1 & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix}$$

назвемо матрицею нескінченного лінійного рекурентного рівняння (3).

Приклад 2.1. *Нехай маємо вектор*

$$a = (3, -4, 4, -4, 4, -4, 4, \ldots),$$

тоді для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $u_0 = 1$ рівносильні наступні рівності:

1.

$$u_n = 3u_{n-1} - 4u_{n-2} + 4u_{n-3} - 4u_{n-4} + 4u_{n-5} - 4u_{n-6} + \ldots, \tag{4}$$

2.

$$u_n = \begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ \frac{-4}{3} & 3 & & & & \\ \frac{4}{-4} & \frac{-4}{3} & 3 & & & \\ \frac{-4}{4} & \frac{4}{-4} & \frac{-4}{3} & 3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{(-1)^{n-1}4}{(-1)^{n-2}4} & \frac{(-1)^{n-2}4}{(-1)^{n-3}4} & \frac{(-1)^{n-3}4}{(-1)^{n-4}4} & \frac{(-1)^{n-4}4}{(-1)^{n-5}4} & \cdots & 3 \end{bmatrix}_n =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ \frac{-4}{3} & 3 & & & & \\ -1 & \frac{-4}{3} & 3 & & & \\ -1 & -1 & \frac{-4}{3} & 3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 3 \end{bmatrix}_n = \left\langle \begin{matrix} 3 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 3 & & & & \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 & & & \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{matrix} \right\rangle_n,$$

де $n = 1, 2, \ldots,$

3.

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 4z^2 - 4z^3 + 4z^4 - 4z^5 + \ldots} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) z^i.$$

Із рекурентного рівняння (4) легко знайти загальний член послідовності u_n, $n = 1, 2, \ldots$. Дійсно,

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 = 3, \\ u_2 &= 3u_1 - 4u_0 = 5, \\ u_3 &= 3u_2 - 4u_1 + 4u_0 = 7, \\ u_4 &= 3u_3 - 4u_2 + 4u_1 - 4u_0 = 9. \end{aligned}$$

Очевидно, ми маємо справу із послідовністю непарних чисел. Припустимо, що $u_k = 2k + 1$. Згідно із припущенням повинна виконуватись рівність

$$2k + 1 = 3(2k-1) - 4(2k-3) + 4(2k-5) - \ldots + (-1)^{k-2} 4 \cdot 3 + (-1)^{k-1} 4 \cdot 1,$$

справедливість якої випливає із того, що

$$4((2k-1) - (2k-3) + (2k-5) - \ldots + (-1)^{k-2} \cdot 3 + (-1)^{k-1} \cdot 1) = 4k.$$

Отже, наше припущення справедливе і, таким чином, встановлено правильність рівності

$$\left\langle \begin{matrix} 3 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 3 & & & & \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 & & & \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{matrix} \right\rangle_n = 2n + 1,$$

яку безпосередньо встановити важче.

Відмітимо також, що генератрису для цієї послідовності можна спростити:

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + z - 4z(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) = 1 + z - \frac{4z}{1+z} = \frac{1 - 2z + z^2}{1+z}.$$

Отже,

$$f(z) = \frac{1+z}{1 - 2z + z^2} \tag{5}$$

Тепер, за виглядом генератриси (5) можна спростити і саме рекурентне рівняння. Остаточно отримаємо лінійне рекурентне рівняння другого порядку

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1, u_1 = 3.$$

Якщо задана деяка послідовність, то можна знайти рекурентне рівняння, якому задовольняють члени цієї послідовності, та її генератрису. Але, розв'язуючи задачі такого типу, ми будемо apriori вважати, що послідовність є нормальною.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 3. *Члени нормальної послідовності*

$$u_0 = 1, u_1, u_2, \dots \tag{6}$$

задовольняють лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + a_3u_{n-3} + \dots,$$

де

$$a_i = (-1)^{i-1}\left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & & & \\ \frac{u_2}{u_1} & u_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{u_i}{u_{i-1}} & \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} & \dots & u_1 \end{array}\right\rangle, \ i = 1, 2, \dots. \tag{7}$$

Доведення. Позаяк, послідовність (6) нормальна, то, згідно з наслідком 1.1, справедливі рівності

$$\left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \dots & a_1 \end{array}\right]_i = u_i, \ i = 1, 2, \dots,$$

з яких можна знайти коефіцієнти a_i, $i = 1, 2, \dots$ лінійного рекурентного рівняння (3). Але ця система, згідно з [5], має розв'язок

$$a_i = (-1)^{i-1}\left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & & & \\ \frac{u_2}{u_1} & u_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{u_i}{u_{i-1}} & \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} & \dots & u_1 \end{array}\right\rangle, \ i = 1, 2, \dots.$$

□

Проілюструємо теорему 3 на прикладі.

Приклад 2.2. *Знайдемо рекурентні рівняння, які задовольняють числові послідовності:*

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_4 = 4, \dots,$$

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4, \dots, \tag{8}$$

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 4, u_3 = 5, \dots. \tag{9}$$

Знаходимо коефіцієнти рекурентного рівняння за формулою (7).

$$a_1 = (-1)^0\langle 2\rangle = 2, \ a_2 = (-1)^1\left\langle \begin{array}{cc} 2 & \\ \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right\rangle = -1, \ a_3 = (-1)^2\left\langle \begin{array}{ccc} 2 & & \\ \frac{3}{2} & 2 & \\ \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right\rangle = 0.$$

Припустимо, що $a_3 = a_4 = \dots = a_{k-1} = 0$, тоді

$$a_k = (-1)^{k-1}\left\langle \begin{array}{cccc} 2 & & & \\ \frac{3}{2} & 2 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{k+1}{k} & \frac{k}{k-1} & \dots & 2 \end{array}\right\rangle = (-1)^{k-1}(2\cdot 0 - 3\cdot 0 + \dots + (-1)^{k-1}(k-1)\cdot 1 +$$

$$(-1)^k k\cdot 2 + (-1)^{k+1}(k+1)\cdot 1) = 0.$$

Отже, маємо $a_1 = 2, a_2 = -1$ і дана числова послідовність задовольняє лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Легко показати, що для числової послідовності (8) коефіцієнти відповідного рекурентного рівняння мають вигляд

$$a_r = \left\langle \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant r} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r = 3s, \\ 1, & \text{якщо } r = 3s+1, \\ -1, & \text{якщо } r = 3s+2, \end{cases} , s = 0, 1, \dots.$$

Отже, послідовність (8) задовольняє нескінченне лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-4} - u_{n-5} + u_{n-7} + u_{n-8} - u_{n-10} - u_{n-11} + \dots,$$

і її генератрисою є функція виду

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^7 - z^8 + z^{10} + z^{11} - \dots}.$$

Позаяк

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z(1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots) - z^2(1 - z^3 + z^6 - z^9 + \dots) = \frac{1 - z - z^2 + z^3}{1 + z^3},$$

то

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{1 - z - z^2 + z^3}.$$

Коефіцієнти рекурентного рівняння, яке задовольняє числова послідовність (9) дорівнюють

$$a_i = (-1)^{i-1}F_{i+2},\ i = 1, 2, \ldots,$$

де F_n — числа Фібоначчі.

Отже, числова послідовність (9) задовольняє нескінченне лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = 3u_{n-1} - 5u_{n-2} + 8u_{n-3} - 13u_{n-4} + \ldots.$$

Цьому нескінченному рекурентному рівнянню відповідає генератриса

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 5z^2 - 8z^3 + 13z^4 - \ldots}.$$

Тому

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i F(i+2)z^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(F(i+1) + F(i))z^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i F(i+1)z^i +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i F(i)z^i = 1 - z\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}F(i+1)z^{i-1} + z^2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-2}F(i)z^{i-2} =$$

$$1 - z\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i F(i+2)z^i + z^2\sum_{i=-1}^{\infty}(-1)^i F(i+2)z^i =$$

$$1 - z\left(1 + \frac{1}{f(z)}\right) + z^2\left(-z^{-1} + 1 + \frac{1}{f(z)}\right).$$

Звідси

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z\left(1 + \frac{1}{f(z)}\right) + z^2\left(-z^{-1} + 1 + \frac{1}{f(z)}\right)$$

або остаточно

$$f(z) = \frac{1 + z - z^2}{1 - 2z + z^2}.$$

Таким чином, в трьох розглянутих випадках, незначні зміни у перших членах числової послідовності приводять до істотно різних рекурентних рівнянь.

В комбінаторному аналізі зустрічається важлива числова послідовність $p(n)$ чисел невпорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні числа. Запишемо перші 25 членів генератриси цієї послідовності.

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+56x^{11}+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+$$

$$176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}+385x^{18}+490x^{19}+627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1255x^{23}+1575x^{24}+\ldots$$

Знайдемо перші 24 коефіцієнти шуканого рекурентного рівняння за формулою (7):

$$1, 1, 0, 0, -1, 0 - 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, \ldots,$$

і кілька перших ненульових членів шуканого рекурентного рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-5} - u_{n-7} + u_{n-12} + u_{n-15} - u_{n-22} - \ldots. \tag{10}$$

Таким чином, ми отримали достатньо індуктивного матеріалу, щоб знайти закон, якому підпорядковується права частина рекурентного рівняння. Ойлер показав (див. [7], стор. 246), що загальний член цього рекурентного рівняння має вигляд

$$u_{n-\frac{3k^2-k}{2}} + u_{n-\frac{3k^2+k}{2}},\ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Зауважимо, що початковою умовою для знаходження числа невпорядкованих розбиттів натурального числа на натуральні доданки є співвідношення

$$p(0) = 1,\ p(m) = 0,\ m < 0.$$

Слід також відзначити, що число $\sigma(n)$, яке дорівнює сумі всіх натуральних дільників натурального числа n, також задовольняє рекурентне рівняння (10), але початкова умова має вигляд

$$\sigma(0) = n,\ \sigma(m) = 0,\ m < 0.$$

Розглянемо деякі випадки, в яких при допомозі нескінченного лінійного рекурентного рівняння, коефіцієнти якого задаються нескінченновимірним вектором, можна побудувати дробово раціональну генератрису, чисельник і знаменник якої є многочленами не вище k-того степеня.

Твердження 2.1. *Якщо нескінченновимірні вектори a, при допомозі яких задаються нескінченні рекурентні рівняння мають вигляд*

$$\begin{gathered} a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, \ldots), \\ a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, -a_1, -a_2, \ldots, -a_k, a_1, \ldots), \\ a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, -a_1, \ldots), \end{gathered} \tag{11}$$

то їм відповідають генератриси:

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{1 - z^k}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k + 1)z^k}, \\ f(z) = \frac{1 + z^k}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k - 1)z^k}, \\ f(z) = \frac{1 + z^k}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + (a_k + 1)z^k}. \end{gathered} \tag{12}$$

Доведення. Згідно із теоремою 2 нескінченному лінійному рекурентному рівнянню, що задається вектором (11) відповідає генератриса

$$f(z) = \frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \ldots + a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \ldots}.$$

Тому маємо

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \ldots + a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \ldots =$$

$$1 - a_1 z(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) - a_2 z^2 (1 - z^k + z^{2k} - \ldots) - \ldots - a_k z^k (1 - z^k + z^{2k} - \ldots) =$$

$$1 - \frac{a_1 z}{1+z^k} - \frac{a_2 z^2}{1+z^k} - \frac{a_k z^k}{1+z^k} = \frac{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k - 1) z^k}{1+z^k}.$$

Таким чином, ми отримуємо генератрису (12). Решта випадків аналогічні. □

У багатьох випадках корисною виявляється наступна теорема:

Теорема 4. *Нехай задано вектор*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

компоненти якого задовольняють рекурентне рівняння

$$a_n = \omega_1 a_{n-1} + \omega_2 a_{n-2} + \ldots + \omega_k a_{n-k}, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

де $a_0 = 1$. *Генератрисою послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, *яка задовольняє рекурентне рівняння*

$$u_0 = 1, \; u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots, \tag{13}$$

є функція $f(z)$ *виду*

$$\frac{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots - \omega_k z^k}{1 - (a_1 + \omega_1) z - \ldots - (a_{k-1} - \omega_1 a_{k-2} - \ldots - \omega_{k-2} a_1 + \omega_{k-1}) z^{k-1} - \omega_k z^k}.$$

Доведення. Згідно із твердженням 2, для послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ рекурентне рівняння (13) відповідає генератрисі

$$f(z) = \frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots}.$$

Тому

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - \sum_{n=k}^{\infty} (\omega_1 a_{n-1} + \omega_2 a_{n-2} + \ldots + \omega_k a_{n-k}) z^n =$$

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - \omega_1 z \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} - \omega_2 z^2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} - \ldots - \omega_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{n-k} =$$

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} - \omega_1 z^1 \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n z^n - \omega_2 z^2 \sum_{n=k-2}^{\infty} a_n z^n - \ldots - \omega_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{k-1} z^{k-1} + \omega_1 z \left(-1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-2} z^{k-2} + \frac{1}{f(z)} \right) +$$

$$\omega_2 z^2 \left(-1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{k-3} z^{k-3} + \frac{1}{f(z)} \right) + \ldots + \omega_{k-1} z^{k-1} \left(-1 + \frac{1}{f(z)} \right) +$$

$$\omega_k z^k \left(-1 + \frac{1}{f(z)} \right).$$

Отже, маємо рівність

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1 - (a_1 + \omega_1) z - \ldots - (a_{k-1} - \omega_1 a_{k-2} - \ldots - \omega_{k-2} a_1 + \omega_{k-1}) z^{k-1} - 2\omega_k z^k}{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots - \omega_k z^k}.$$

□

Наведемо приклад, який ілюструє теорему 4.

Приклад 2.3. *Нехай задано нескінченне рекурентне рівняння*

$$u_n = u_{n-1} + 3u_{n-2} + 8u_{n-3} + 21u_{n-4} + 55u_{n-5} + \ldots + F_{2k-1} u_{n-k} + \ldots,$$

де F_n *— числа Фібоначчі. Коефіцієнти цього рівняння задовольняють лінійне рекурентне рівняння другого порядку*

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Отже, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = -1$ *і генератриса числової послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, *згідно із теоремою 4, має вигляд*

$$f(z) = \frac{1 - 3z + z^2}{1 - 4z + z^2}.$$

Висновок

Дослідження лінійних рекурентних рівнянь k–го порядку при допомозі параперманентів трикутних матриць можуть бути використані також при аналогічних дослідженнях нескінченних лінійних рекурентних рівнянь. При цьому можна виділити класи таких нескінченних лінійних рекурентних рівнянь, які зводяться до рівносильних лінійних рекурентних рівнянь k-го порядку, та побудувати для них відповідні генератриси.

Література

1. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications* // Algebra and Diskrete Mathematics. — 2007. — №1. — P. 109-138.
2. Заторський Р.А. *Параперманенти та лінійні рекурентні співвідношення* // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої сторіччю від початку роботи Д.О. Граве в Київському університеті. — Київ. — 2002. — С. 138.
3. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. — С. 3-17.
4. Эндрюс Г. Теория развиений. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 256 с.
5. Атаманюк О.Б., Заторський Р.А. *Застосування функцій трикутних матриць до розв'язання деяких систем рівнянь* // Матеріали міжнар. конф., присвяченої 125 річниці від дня народж. Ганса Гана. — Чернівці. — 2004. — С.7-8.

6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

7. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. — М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. — 315 с.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 12.11.2008

Zatorsky R.A., Malarchuk A.R. *The infinite linear recurrent equations and paradeterminants*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 35–46.

The infinite linear recurrent equations by means of parapermanents of triangular matrices are investigated.

Заторский Р.А., Малярчук А.Р. *Бесконечные линейные рекуррентные уравнения и параперманенты* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 35-46.

При помощи параперманентов треугольных матриц исследуются бесконечные линейные рекуррентные уравнения.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.946+511.37

Ільків В.С.

ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ІЗ НЕЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Ільків В.С. *Гладкість розв'язків задач із нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 47–58.

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами досліджено умови розв'язності задачі з багатоточковими нелокальними умовами. За допомогою метричного підходу встановлено існування та єдиність розв'язку у шкалі просторів Соболєва. Доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникають у процесі побудови цього розв'язку. Встановлено залежність між гладкістю розв'язку, гладкістю правих частин задачі та коефіцієнтами крайових умов.

1 Постановка задачі. Позначення

В області $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega_{2\pi}^p$, де $T > 0$, $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглядається багатоточкова задача для строго гіперболічного рівняння

$$L(t, D_t, D)u \equiv D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, D) D_t^{n-j} u = 0, \qquad D_t = \partial/\partial t, \tag{1}$$

з нелокальними багатоточковими умовами

$$lu \equiv \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D) D_t^{n-j} u\big|_{t=t_\alpha} = \varphi, \tag{2}$$

що пов'язують значення невідомої функції $u = u(t,x)$ та її похідних $D_t u, \dots, D_t^{n-1} u$ в різних M точках $t_1, \dots, t_M$, причому $M \geq 2$, $0 \leq t_1 < \dots < t_M \leq T$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Коефіцієнти $A_j(t,D)$ рівняння (1) — диференціальні оператори порядку jl вигляду $A_j(t,D) = \sum\limits_{|s|\le jl} a_{js}(t)D^s$, де $a_{js}(t)$ — неперервно диференційовні на відрізку $[0,T]$ комплекснозначні функції, $D^s = D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p}$, $D_1 = -i\partial/\partial x_1, \ldots, D_p = -i\partial/\partial x_p$, $s = (s_1,\ldots,s_p)$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$.

Нехай $A_j^0(t,D)$ — головна частина $A_j(t,D)$, тоді $A_j(t,D) = A_j^0(t,D) + A_j^1(t,D)$, де $A_j^0(t,D) = \sum\limits_{|s|=jl} a_{js}(t)D^s$, а $A_j^1(t,D) = \sum\limits_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t)D^s$, тобто припускаємо, що коефіцієнти $a_{js}(t)$ молодшої частини дорівнюють нулеві при $(j-1)l+1 < |s| < jl$, $j = 1,\ldots,n$.

Із строгої гіперболічності диференціального рівняння (1) випливає, що для всіх векторів $(t,\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ корені $\lambda_1(t,\xi),\ldots,\lambda_n(t,\xi)$ алгебричного рівняння

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j} = 0 \tag{3}$$

є уявними та різними. Тому ці корені є неперервно диференційовними функціями за змінною t та гладкими за змінною ξ, модуль дискримінанта $\prod\limits_{1\le i<j\le n}\big(\lambda_i(t,\xi)-\lambda_j(t,\xi)\big)^2$ многочлена $\lambda^n + \sum_{j=1}^n A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j}$ є додатною функцією.

Оператори $B_{j\alpha}(D)$ в умовах (2) — це стовпці з n елементів такого вигляду: $B_{j\alpha}(D) = \sum\limits_{|s|\le jl} B_{j\alpha s}D^s$, де $B_{j\alpha s}$ — вектори із $\mathbb{C}^n$. Деякі компоненти (які виберемо далі) векторів $B_{j\alpha s}\in\mathbb{C}^n$ будемо вважати параметрами задачі (1), (2).

Натуральне число l характеризує ріст коренів $\lambda_j(t,\xi)$, а саме: абсолютна величина кореня $\lambda_j(t,\xi)$ при $\xi\to\infty$ росте не швидше ніж $|\xi|^l$, тобто поліноміально.

Задача (1), (2) розглядалася в роботі [1] для систем неоднорідних безтипних диференціальних рівнянь, а також для випадку двоточкових умов в роботах [3, 2]. Встановлено розв'язність задач у просторах $\mathbf{E}_{h,l} = \mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $h,l\in\mathbb{R}$, періодичних вектор-функцій $\psi(x) = \sum\limits_k \widehat{\psi}_k e^{i(k,x)}$, які отримуються у результаті поповнення множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\exp(2h\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2},$$

де $x = (x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_{2\pi}^p$, $k = (k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$ — цілочисловий вектор, $(k,x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$, $\widetilde{k} = (1+k_1^2+\cdots+k_p^2)^{1/2}$, а символ „*" позначає операцію ермітового спряження.

Ці простори складаються з функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають експоненційну поведінку. Така властивість є характерною ознакою нелокальних задач для безтипних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.

Для рівнянь зі сталими коефіцієнтами задачі типу (1), (2) мають розв'язки [4, 5] у шкалі просторів Соболєва $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}$, де простір $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2q}\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2}.$$

У роботах [6, 7, 8] встановлено, що розв'язки нелокальних задач для рівнянь зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу (строго гіперболічних) другого порядку за змінною t, також належать шкалі просторів Соболєва, якщо цій шкалі належать праві частини задач.

Нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами, факторизованих та деяких інших рівнянь вивчалися, зокрема, у роботах [9, 10, 11, 12]

Розглядувані задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки. Для отримання оцінок знизу малих знаменників використовується метричний підхід [13, 14].

Існування розв'язку встановлюється для всіх задач за винятком множини задач малої міри в просторі коефіцієнтів крайових умов.

В даній роботі, яка є продовженням роботи [8] на випадок змінних коефіцієнтів в головній частині рівняння, показано, що майже всі задачі (1), (2) розв'язні в просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Встановлено гладкість їх розв'язків та залежність гладкості від коефіцієнтів нелокальних умов.

Розв'язком задачі (1), (2) у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ називаємо n разів неперервно диференційовну на відрізку $[0,T]$ функцію $u = u(t,x)$ таку, що для кожного $t\in[0,T]$ елементи $u(t,\cdot), D_tu(t,\cdot),\ldots,D_t^{n-1}u(t,\cdot)$ належать до цієї шкали, і u задовольняє рівняння (1) та умови (2) у слабкому сенсі:

$$\int_{\Omega_{2\pi}^p} L(t,D_t,D)u(t,\cdot)w\,dt = 0, \qquad \int_{\Omega_{2\pi}^p}(lu-\varphi)w\,dt = 0$$

для всіх $t\in[0,T]$ та для всіх тригонометричних многочленів $w = w(x)$.

Розв'язок шукаємо в банаховому просторі $\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, де $\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, $l,q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, — простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що $D_t^ju\in\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^p)\big)$ для кожного значення $j = 0,1,\ldots,n$; норму в просторі $\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$ визначимо формулою

$$\|u;\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\| = \Big(\sum_{j=0}^{n}\|D_t^ju;\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^p)\big)\|^2\Big)^{1/2}.$$

Якщо $U^j\in\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\big)$ для $j = 1,\ldots,n$, то вважаємо, що вектор-функція $U = \mathrm{col}(U^1,\ldots,U^n)$ належить до $\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)$ і $\|U;\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\|U^j;\mathbf{C}\big([0,T],\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|^2$.

Для довільної послідовності комплексних чисел $F(k)$ введемо псевдодиференціальний оператор $F(D)$, який діє у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}$ за формулою

$$F(D)\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\widehat{\psi}_ke^{ikx},$$

де $\psi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\psi}_ke^{ikx}$. Якщо послідовність $|F(k)|$ обмежена зверху, то оператор $F(D)$ є обмеженим оператором у цій шкалі, якщо — знизу, то обмеженим є оператор $F^{-1}(D)$; всякий обмежений оператор відображає простір $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$ в себе.

Послідовність $\widetilde{k}$, що використовується в означенні норми $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\|$, визначає оператор $\widetilde{D}$, який для всіх $q_1\in\mathbb{R}$ справджує формулу $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| = \|\widetilde{D}^{q_1}\varphi;\mathbf{H}_{q-q_1}(\Omega_{2\pi}^p)\|$ для довільної функції φ з простору $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, зокрема $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| = \|\widetilde{D}^q\varphi;\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)\|$.

2 Побудова розв'язку та умови існування у просторах Соболєва

Нехай $\lambda_j(t,k) = i\widetilde{k}^{\,l}\mu_j(t,k)$ при $j=1,\dots,n$, а функція $U_k(t)$ визначається формулою

$$U_k(t) = \operatorname{col}\left(U_k^1(t),\dots,U_k^n(t)\right) = \operatorname{col}\left(\widetilde{k}^{\,nl}u_k(t), \widetilde{k}^{\,(n-1)l}u_k'(t),\dots,\widetilde{k}^{\,l}u_k^{(n-1)}(t)\right), \tag{4}$$

де $u_k(t)$ — коефіцієнти Фур'є розв'язку u задачі (1), (2). Якщо $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, то із заміни (4) випливає, що $D_t^j u \in \mathbf{C}\left([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega_{2\pi}^p)\right)$ при $j=0,1,\dots,n$, тобто $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$.

Вектор-функція $U = \operatorname{col}(U^1,\dots,U^n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} U_k(t)e^{ikx}$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$D_t U = i\widetilde{D}^l A(t,D)U, \qquad A(t,D) = A^0(t,D) + A^1(t,D), \tag{5}$$

де $A^0(t,D)$ і $A^1(t,D)$ оператор-матриці порядку n з елементами $A_{ij}^0(t,D)$ та $A_{ij}^1(t,D)$, причому $A^0(t,0)=0$, $A_{i,i+1}^1(t,0)=1$, $A_{i,i+1}^0(t,k)=1$ при $k\neq 0$, $i=1,\dots,n-1$, $A_{nj}^0(t,k) = -i^{-j}A_j^0(t,k/\widetilde{k}^{\,l})$, $A_{nj}^1(t,k) = -(i\widetilde{k}^{\,l})^{-j}A_j^1(t,k)$, всі інші елементи $A_{ij}^0(t,k)$ та $A_{ij}^1(t,k)$ є нулями. Оператори $A^0(t,D)$ та $i\widetilde{D}^lA^1(t,D)$ — обмежені для всіх $t\in[0,T]$.

Числа $\mu_j(t,k)$ дорівнюють нулеві при $k=0$, а при $k\neq 0$ є простими коренями многочлена

$$L^0(\mu,t,k) = \mu^n + \sum_{j=1}^n A_{nj}^0(t,k)\mu^{n-j} = \prod_{j=1}^n\left(\mu - \mu_j(k)\right) \tag{6}$$

з обмеженими на $[0,T]\times\mathbb{Z}^p$ коефіцієнтами $A_{nj}^0(t,k)$, $j=1,\dots,n$, тому вони також обмежені зверху:

$$\sup_{j,t,k}|\mu_j(t,k)| \le \widetilde{\mu}, \tag{7}$$

де $\widetilde{\mu}$ залежить лише від $|a_{js}|$, $|s|=jl$, $j=1,\dots,n$, а похідна $\dot{L}^0(\mu,t,k)$, $k\neq 0$, за змінною μ многочлена (6) на його коренях внаслідок строгої гіперболічності обмежена знизу, тому

$$\sup_{j,t,k}|\dot{L}^0(\mu_j(k),t,k)| = \sup_{j,t,k}\prod_{j=1, j\neq\alpha}^n |\mu_j(t,k) - \mu_\alpha(t,k)| \ge d. \tag{8}$$

Введемо нові невідомі вектори $Z_k(t) = \operatorname{col}\left(Z_k^1(t),\dots,Z_k^n(t)\right)$ за формулою

$$U_k(t) = R(t,k)G(t,k)Z_k(t), \tag{9}$$

де $R(t,0)$, $G(t,0)$ — одиничні матриці, $R(t,k) = \left(\mu_j^{\alpha-1}(t,k)\right)_{\alpha,j=1}^n$ — матриця Вандермонда, $G(t,k) = \operatorname{diag}\left(\exp(i\widetilde{k}^{\,l}\int_0^t\mu_j(\tau,k)\,d\tau)\right)_{j=1}^n$ — діагональна матриця, тому для $k\neq 0$ маємо $U_k^\alpha(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j^{\alpha-1}(t,k)\exp\left(i\widetilde{k}^{\,l}\int_0^t\mu_j(\tau,k)\,d\tau\right)Z_k^j(t)$, а також $U_0^\alpha(t) = Z_0^\alpha(t)$ для $k=0$.

Оскільки $G'(t,k) = i\widetilde{D}^l\operatorname{diag}(\mu_j(t,k))_{j=1}^n\cdot G(t,k)$, то функція $Z = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Z_k(t)e^{ikx}$, задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$D_tZ = G^{-1}(t,D)R^{-1}(t,D)\Big(i\widetilde{D}^lA^1(t,D)R(t,D)G(t,D) - D_tR(t,D)G(t,D)\Big)Z. \tag{10}$$

Елементи $i\widetilde{D}^lA_{ij}^1(t,D)$ матриці $i\widetilde{D}^lA^1(t,D)$ є обмеженими операторами, як і елементи матриць $R(t,D)$ та $G(t,D)$, для всіх $t\in[0,T]$. Обернені матриці $R^{-1}(t,D)$ та $G^{-1}(t,D)$ мають обмежені елементи, оскільки [15, 16, с. 428]

$$R^{-1}(t,k) = \operatorname{diag}\left(\left(\dot{L}^0(\mu_j(t,k),t,k)\right)^{-1}\right)_{j=1}^n\cdot\left(A_{n,n-i-j+1}^0(t,k)\right)_{i,j=1}^n\cdot R(t,k),$$

$$G^{-1}(t,k) = \operatorname{diag}\left(\exp(-i\widetilde{k}^{\,l}\int_0^t\mu_j(\tau,k)\,d\tau)\right)_{j=1}^n,$$

де $A_{n,0}^0(t,k)$ — одинична, а $A_{n,j}^0(t,k)$ — нульова матриці при $j<0$ та $k\neq 0$; елементи $(\alpha-1)D_t\mu_j(t,k)\mu_j^{\alpha-2}(t,k)$ матриці $D_tR(t,D)$ також є обмеженими операторами.

Теорема 1. *Якщо вектор-функція Z задовольняє систему рівнянь* (10) *і $Z\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, $q_1\in\mathbb{R}$, то вектор-функція $U = R(t,D)G(t,D)Z$ задовольняє систему рівнянь* (5) *і належить до простору $\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$. Якщо фундаментальна*[1] *матриця $\Phi_j(t,D)$ системи* (10) *нормована рівністю $\Phi_j(t_j,D) = G^{-1}(t_j,D)R^{-1}(t_j,D)$, де $j=1,\dots,n$, то*

$$U = R(t,D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p), \qquad U(t_j,\cdot) = C, \tag{11}$$

для довільної вектор-функції $C\in\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$.

Доведення. Оскільки стовпці матриці $R(t,D)$ і числа $\mu_j(t,D)$ є відповідно власними векторами та власними значеннями матриці $A^0(t,D)$, а значить

$$R(t,D)D_tG(t,D) = i\widetilde{D}^lR(t,D)\operatorname{diag}\left(\mu_j(t,D)\right)_{j=1}^n G(t,D) = i\widetilde{D}^lA^0(t,D)R(t,D)G(t,D),$$

і $G^{-1}(t,D)R^{-1}(t,D)D_tZ = i\widetilde{D}^lA^1(t,D)R(t,D)G(t,D) - D_tR(t,D)G(t,D)Z$, останнє випливає з рівності (10), то

$$\begin{aligned} D_tU &= R(t,D)D_tG(t,D)Z + D_tR(t,D)G(t,D)Z + R(t,D)G(t,D)D_tZ = \\ &= i\widetilde{D}^lA^0(t,D)R(t,D)G(t,D)Z + i\widetilde{D}^lA^1(t,D)R(t,D)G(t,D)Z, \end{aligned}$$

тобто $D_tU = i\widetilde{D}^lA(t,D)U$. Внаслідок обмеженості операторів $R(t,D)$ і $G(t,D)$ та із умови $Z\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ випливає включення $U\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$.

Загальний розв'язок рівняння $Z_k' = A^2(t,k)Z_k$, де

$$A^2(t,k) = G^{-1}(t,k)R^{-1}(t,k)\Big(i\widetilde{k}^{\,l}A^1(t,k)R(t,k)G(t,k) - R'(t,k)G(t,k)\Big),$$

визначається формулою $Z_k = \Phi_j(t,k)C_k$, де $C_k\in\mathbb{C}^n$, тому

$$Z = \Phi_j(t,D)C, \qquad U = R(t,D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C$$

для $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} C_ke^{ikx}$, а також $U(t_j,\cdot) = R(t_j,D)G(t_j,D)\Phi_j(t_j,D)C = C$.

[1] Під фундаментальною матрицею $\Phi(t,D)$ системи (10) розуміємо матрицю, що породжена послідовністю матриць $\{\Phi(t,k)\}_{k\in\mathbb{Z}^p}$, де $\Phi(t,k)$ — фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь, яка отримується із системи (10) заміною оператора D на вектор $k\in\mathbb{Z}^p$.

Оскільки для сліду $\operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right)$ справджується формула

$$\left(\operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right)\right)' = \operatorname{tr}\left(\Phi_j^{*\prime}(t,k)\Phi_j(t,k) + \Phi_j^*(t,k)\Phi_j'(t,k)\right) = \\ = \operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\left(A^{2*}(t,k) + A^2(t,k)\right)\Phi_j(t,k)\right),$$

то із нерівностей для слідів

$$\beta_1 \operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right) \le \operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\left(A^{2*}(t,k) + A^2(t,k)\right)\Phi_j(t,k)\right) \le \\ \le \beta_2 \operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right)$$

де β_1 і β_1 — незалежні від t та k сталі, отримуємо нерівності для похідних

$$\left(e^{-\beta_1 t} \operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right)\right)' \ge 0, \qquad \left(e^{-\beta_2 t} \operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right)\right)' \le 0.$$

Інтегруючи ці нерівності на відрізку $[t_j, t]$, отримуємо відповідно при $t < t_j$ та при $t \ge t_j$ оцінки

$$\operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right) \le e^{\beta_1(t-t_j)} \operatorname{tr}\left(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\right),$$
$$\operatorname{tr}\left(\Phi_j^*(t,k)\Phi_j(t,k)\right) \le e^{\beta_2(t-t_j)} \operatorname{tr}\left(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\right).$$

Отже, оператор $\Phi_j(t,D)$, а разом з ним і оператор $R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)$ є обмеженим. Звідси маємо, що $U \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, якщо $C \in \mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$. □

Введемо матриці $B_\alpha(D)$, $\alpha = 1,\dots,M$, які є обмеженими операторами, за допомогою формули

$$B_\alpha(D) = \left(\widetilde{D}^{-nl}B_{n\alpha}(D), \widetilde{D}^{-(n-1)l}B_{n-1,\alpha}(D), \dots, \widetilde{D}^{-l}B_{1\alpha}(D)\right),$$

тоді з врахуванням (4) умови (2) перетворяться до вигляду

$$\sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)U|_{t=t_\alpha} = \varphi. \tag{12}$$

Використовуючи (11), отримаємо систему рівнянь для визначення вектор-функції C:

$$\Delta_j(D)C = \varphi, \tag{13}$$

де

$$\Delta_j(D) = B_j(D) + \sum_{\alpha=1,\alpha\ne j}^{M} B_\alpha(D)R(D)G(t,D)\Phi_j(t_\alpha,D), \quad j = 1,\dots,n. \tag{14}$$

Теорема 2. *Якщо для деякого j, $1 \le j \le n$, існує оператор $\Delta_j^{-1}(D)$, то задача (5), (12) має не більше одного розв'язку. При виконанні для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ сильнішої умови, а саме, нерівності*

$$\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_3\widetilde{k}^{\,2r}, \qquad \beta_3 > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

де $\widehat{\varphi}_k$ — коефіцієнти Фур'є вектор-функції φ, розв'язок U існує, належить до простору $\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, де $q < nl - r - p/2$, і визначається формулою

$$U = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)\Delta_j^{-1}(D)\varphi. \tag{16}$$

При цьому існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2), а саме $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1 \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$.

Доведення. Якщо $\widetilde{U}$ та $\widetilde{\widetilde{U}}$ різні розв'язки задачі (5), (12), то $U^0 = \widetilde{U} - \widetilde{\widetilde{U}}$ — ненульовий розв'язок однорідної ($\varphi = 0$) задачі (5), (12), тому

$$U^0 = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C,$$

як у формулі (11), і $\Delta_j(D)C = 0$, де $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} C_k e^{ikx}$, причому $C \ne 0$.

Тоді існує $\bar{k} \in \mathbb{Z}^p$ таке, що $C_{\bar{k}} \ne 0$. Оскільки $C_{\bar{k}}$ визначається із системи лінійних однорідних алгебричних рівнянь $\Delta_j(\bar{k})C_{\bar{k}} = 0$, то матриця $\Delta_j(\bar{k})$ є виродженою, $\det\Delta_j(\bar{k}) = 0$. Отже, матриця $\Delta_j^{-1}(\bar{k})$ не існує, як і оператор $\Delta_j^{-1}(D)$, що суперечить припущенню теореми. Єдиність розв'язку U доведено.

З теореми 1 для деякої додатної сталої β_4 випливає, що

$$\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_4\|\Delta_j^{-1}(D)\varphi;\mathbf{H}_{q-nl}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \beta_4\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2(q-nl)}\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k. \tag{17}$$

Використовуючи умову (15) та рівність (17), маємо при $q < nl - r - p/2$ включення $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, оскільки $\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_3\beta_4\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2(q-nl+r)} < \infty$.

За формулою (4) отримуємо, що $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1$ і $\|u;\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\| = \|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|$. □

За єдиності розв'язку задачі (5), (12), умова (15) виконується для всіх скінченних вектор-сум φ, причому стала β_3 залежить від функції φ.

Ця умова може виконуватися для якоїсь функції із простору $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$ і не виконуватися для іншої функції із цього ж простору. Щоб усунути таку залежність, перетворимо ліву частину формули (15).

Нехай φ — довільна функція із простору $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega_{2\pi}^p)$, тоді із обмеженості елементів матриці $\Delta_j(D)$ випливає нерівність

$$\widehat{\varphi}_k^*\Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_5\widehat{\varphi}_k^*\widehat{\varphi}_k/|\det\Delta_j(k)|^2, \tag{18}$$

де стала β_5 не залежить від k та від φ.

Теорема 3. *Якщо для деякої послідовності $\{j(k)\}$, де $1 \le j(k) \le n$, виконується умова*

$$|\det\Delta_{j(k)}(k)| \ge \beta_6\widetilde{k}^{\,r}, \qquad \beta_6 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{19}$$

то задача (1), (2) має єдиний розв'язок $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$ для довільної функції φ із простору $\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)$.

Доведення. Згідно з формулою (16) розв'язок задачі (5), (12) має вигляд

$$U(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} R(k)G(t,k)\Phi_j(t,k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k e^{ikx},$$

причому індекс j може залежати від вектора k, тобто $j = j(k)$. Тому з нерівностей (17) та (18) випливає оцінка

$$\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_4\beta_5\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2(q-nl)}\widehat{\varphi}_k^*\widehat{\varphi}_k/|\Delta_{j(k)}^{-1}(k)|^2.$$

Тепер із умови (19) і теореми 2 випливає, що $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$, оскільки

$$\|u;\mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_4\beta_5\beta_6^{-2}\|\varphi;\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.$$

□

3 Оцінки малих знаменників

Вирази $\Delta_{j(k)}(k)$ є полілінійними функціями елементів матриць $B_1(k), \dots, B_n(k)$ і нелінійно залежать від елементів матриці $A^0(k)$ та матриці $A^1(t,k)$. Вони, взагалі, є малими знаменниками задачі (1), (2), які можуть також обертатися в нуль для деяких значень її коефіцієнтів.

Будемо використовувати метричний підхід для отримання оцінок знизу знаменників $|\Delta_{j(k)}(k)|$, вважаючи фіксованим рівняння (1). Елементи векторів $B_{j\alpha s}$ із умови (2) належать одиничному кругу $\mathcal{O}$ з центром у початку координат комплексної площини, тобто $B_{j\alpha s} \in \mathcal{O}^n$. Це не обмежує загальності і отримується нормуванням умови (2).

Позначимо через $\delta(k)$ матрицю $\Delta_{j(k)}(k)$. Послідовність $j(k)$ виберемо далі. Нехай перші n коефіцієнтів мають вигляд

$$b^1 = B^{\zeta^1}_{1\alpha_1 s^1}, \qquad b^2 = B^{\zeta^2}_{2\alpha_1 s^2}, \qquad \dots, \qquad b^n = B^{\zeta^n}_{n\alpha_1 s^n},$$

де $s^j = (\theta^j, 0, \dots, 0)$, $0 \le \theta^j \le jl$, $j = 1, \dots, n$, другі n коефіцієнтів —

$$b^{n+1} = B^{\zeta^{n+1}}_{1\alpha_2 s^{n+1}}, \qquad b^{n+2} = B^{\zeta^{n+2}}_{2\alpha_2 s^{n+2}}, \qquad \dots, \qquad b^{2n} = B^{\zeta^{2n}}_{n\alpha_2 s^{2n}},$$

де $s^j = (0, \theta^j, 0, \dots, 0)$, $0 \le \theta^j \le (j-n)l$, $j = n+1, \dots, 2n$, останні n коефіцієнтів вибираємо так:

$$b^{(p-1)n+1} = B^{\zeta^{(p-1)n+1}}_{1\alpha_p s^{(p-1)n+1}}, \quad b^{(p-1)n+2} = B^{\zeta^{(p-1)n+2}}_{2\alpha_p s^{(p-1)n+2}}, \quad \dots, \quad b^{pn} = B^{\zeta^{pn}}_{n\alpha_p s^{pn}},$$

де $s^j = (0, \dots, 0, \theta^j,)$, $0 \le \theta^j \le (j-(p-1)n)l$, $j = (p-1)n+1, \dots, pn$, причому $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in \{1, \dots, M\}^p$,

$$\{\zeta^1, \dots, \zeta^n\} = \{\zeta^{n+1}, \dots, \zeta^{2n}\} = \dots = \{\zeta^{(p-1)n+1}, \dots, \zeta^{pn}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Визначимо число θ і вектор b формулами

$$\theta = \min_{j=1,\dots,p} \sum_{\sigma=1}^{n} \theta^{(j-1)p+\sigma}, \qquad b = \mathrm{col}(b^1, \dots, b^{pn}). \tag{20}$$

Вважаємо, що елементи матриці $\delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, залежать лише від компонент $b^1, \dots, b^{pn}$ вектора $b \in \mathcal{O}^{pn}$; інші компоненти векторів $B_{j\alpha s}$ фіксуємо.

При цьому матриця $\delta(0)$, де $\delta(0) = \Delta_1(0)$, не залежить від $b^1, \dots, b^{pn}$, тому $\det\delta(0)$ є сталою стосовно цих коефіцієнтів. Фіксовані коефіцієнти вибираємо так, щоб ця матриця була невиродженою ($\det\delta(0) \neq 0$).

Лема. *Для довільних чисел r та ε, і для всіх векторів $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$, $r < \theta - n(p+nl+l)/2$, $\mathrm{meas}\, B_\varepsilon \le \varepsilon$, виконується нерівність* (19), *причому стала $\beta_6 = \beta_6(\varepsilon)$ та множина B_ε залежать від r і*

$$\beta_6 = \varepsilon^{n/2} \min\Big\{|\det\delta(0)|/\varepsilon^{n/2}, n^{-n/2}\pi^{-n^2p/2}\Big(\sum_{k\neq 0} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}\Big)^{-n/2}\Big\} > 0. \tag{21}$$

Доведення. Нехай $k = 0$, тоді $|\det\delta(0)| \ge \beta_6$ і нерівність (19) виконується.

Позначимо Ω_k, $k \neq 0$, підмножину тих векторів b із множини $\mathcal{O}^{pn}$, для яких не виконується нерівність (19) для фіксованого значення k. Очевидними є такі рівності: $\bigcup\limits_{k\neq 0} \Omega_k = B_\varepsilon$ і $\mathrm{meas}\, B_\varepsilon \le \sum\limits_{k\neq 0} \mathrm{meas}\,\Omega_k$.

Якщо $k \neq 0$ і $|k_1| = \max\{|k_1|, \dots, |k_1|\}$, то для $j(k) = \alpha^1$ розкладемо визначник $\det\delta(k)$ за останнім його стовпцем

$$|\det\delta(k)| = \frac{|k_1|^{\theta^1}}{\widetilde{k}^{\,l}} |\det\delta_1(k) b^1 - \check{\delta}_1(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\,\theta^1 - l}}{\sqrt{p+1}} |\det\delta_1(k)| \Big| b^1 - \frac{\check{\delta}_1(k)}{\det\delta_1(k)} \Big|, \tag{22}$$

де матриця $\delta_1(k)$ і функція $\check{\delta}_1(k)$ не залежать від b^1, а залежать від $b^2, \dots, b^{pn}$, причому $\delta_1(k)$ отримується із $\delta(k)$ викреслюванням останнього стовпця і рядка з номером ζ^1.

Для матриці $\delta_1(k)$, яка має порядок $n-1$ формула (22) має вигляд

$$|\det\delta_1(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\,\theta^2 - 2l}}{\sqrt{p+1}} |\det\delta_2(k)| \Big| b^2 - \frac{\check{\delta}_2(k)}{\det\delta_2(k)} \Big|,$$

а матриця $\delta_2(k)$ має порядок $n-2$, не залежить від b^1 та b^2 і отримується з матриці $\delta(k)$ викреслюванням двох останніх стовпців і двох рядків з номерами ζ^1 і ζ^2. Таким способом отримуємо послідовність матриць $\delta_1(k), \dots, \delta_n(k)$ і нерівностей

$$|\det\delta_{m-1}(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\,\theta^m - ml}}{\sqrt{p+1}} |\det\delta_m(k)| \Big| b^m - \frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)} \Big|,$$

де $m = 2, \dots, n$, $\det\delta_n(k) = 1$.

Об'єднуємо ці нерівності з нерівністю (22) в одну нерівність

$$|\det\delta(k)| \ge \frac{\widetilde{k}^{\,\theta^1 + \dots + \theta^n - n(n+1)l/2}}{(p+1)^{n/2}} \prod_{m=1}^{n} \Big| b^m - \frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)} \Big|. \tag{23}$$

Формула (23) справджується для тих векторів $b \in \mathcal{O}^{pn}$, для яких виконується нерівність $\det\delta_1(k) \cdots \det\delta_{n-1}(k) = \prod\limits_{m=2}^{n} \Big| b^m - \dfrac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)} \Big| \neq 0$.

Множник $b^m - \dfrac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)}$, $m = 1, \dots, n$, лінійно залежить від b^m, тому

$$\Big| b^m - \frac{\check{\delta}_m(k)}{\det\delta_m(k)} \Big| \ge \beta_6^{1/n} \widetilde{k}^{\,(r-\theta)/n + (n+1)l/2} \tag{24}$$

для всіх $b^m \in \mathcal{O} \setminus \check{\Omega}^m_k(b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn})$, де $\check{\Omega}^m_k(b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn})$ є проекцією на m-ту координату множини векторів $\Omega^m_k(b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn})$. Остання є підмножиною векторів з фіксованими компонентами $b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn}$ множини Ω^m_k векторів b, для яких не виконується нерівність (24).

Множина $\check{\Omega}^m_k(b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn})$ — підмножина множини, що є перетином множини $\mathcal{O}$ та круга радіуса $\beta_6^{1/n} \widetilde{k}^{\,(r-\theta)/n + (n+1)l/2}$ з центром у точці $\check{\delta}_m(k)/\det\delta_m(k)$, тому

$$\mathrm{meas}\, \check{\Omega}^m_k(b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn}) \le \pi\beta_6^{2/n} \widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n + nl + l}.$$

Інтегруючи останню нерівність за змінними $b^1, \dots, b^{m-1}, b^{m+1}, \dots, b^{pn}$ в області $\mathcal{O}^{pn-1}$ маємо

$$\operatorname{meas}\Omega_k^m \le \pi^{pn}\beta_6^{2/n}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}.$$

На множині $\mathcal{O}^{pn} \setminus \Big(\bigcup\limits_{m=1}^{n} \Omega_k^m\Big)$ нерівність (24) виконується для всіх $m = 1, \dots, n$, отже $\Omega_k \subset \bigcup\limits_{m=1}^{n} \Omega_k^m$ і

$$\operatorname{meas}\Omega_k \le n\pi^{pn}\beta_6^{2/n}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}. \tag{25}$$

Для векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k_1| < |k_2| = \max\{|k_1|, \dots, |k_p|\}$ також виконується оцінка (25). Її отримуємо встановлюючи оцінку (23) для вектора $b^{n+1}, \dots, b^{2n}$ та приймаючи $j(k) = \alpha_2$.

Аналогічно встановлюється оцінка (25) для всіх інших векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Підставляючи нерівність (24) у (24) і враховуючи (20) отримуємо шукану нерівність (19). Із нерівності (25) випливає нерівність для міри множини B_ε:

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \sum_{k\neq 0}\operatorname{meas}\Omega_k \le n\pi^{pn}\beta_6^{2/n}\sum_{k\neq 0}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l} = \varepsilon.$$

□

Теорема 4. *Якщо виконуються нерівності*

$$0 < \varepsilon < \min\Big\{1, \big(n^{n/2}\pi^{n^2p/2}|\det\delta(0)|/\big(\sum_{k\neq 0}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+nl+l}\big)^{-n/2}\big)^{2/n}\Big\},\ \ r < \theta - n(p+nl+l)/2,$$

а також умова $\varphi \in \mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega_{2\pi}^p)$, *то для всіх векторів* $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, *де* B_ε, $\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \varepsilon$, *множина із леми, існує єдиний розв'язок* u, $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, *задачі* (1), (2) *та виконується нерівність*

$$\|u;\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \varepsilon^{-n}\beta_4\beta_5 n^n\pi^{n^2p}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+(n+1)l}\Big)^n\|\varphi;\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \tag{26}$$

Доведення. Якщо $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, то за лемою виконується нерівність (19) зі сталою β_6, яка визначається формулою $\beta_6 = \varepsilon^{n/2}n^{-n/2}\pi^{-n^2p/2}\big(\sum\limits_{k\neq 0}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+(n+1)l}\big)^{-n/2}$ згідно із (21), а, отже, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Нерівність (26) безпосередньо випливає із формул (17) та (18). □

Із теореми 4 випливає, що розв'язок існує в просторі $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ для більшості задач (1), (2), якщо $\varphi \in \mathbf{H}_\psi(\Omega^p_{2\pi})$ та $\psi > q + n(p+nl+l)/2 - nl - \theta$. В залежності від вигляду вектора b стала θ змінюється від максимального значення $n(nl+l)/2$ до мінімального значення 0, тобто діапазон граничних значень гладкості вектор-функції φ — це інтервал $(q + np/2 - nl,\ q + np/2 - nl + n(nl+l)/2)$.

4 Висновки

Задача із загальними багатоточковими нелокальними умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку з неперервними за t коефіцієнтами є розв'язною у шкалі просторів Соболєва періодичних за змінною x функцій, причому гладкість правої частини задачі (із достатніх умов існування розв'язку) залежить від вибору коефіцієнтів крайових умов в якості змінних параметрів.

Отримані результати можна поширити на випадок систем гіперболічних рівнянь високого порядку.

Література

1. *Ільків В. С.* Багатоточкова нелокальна неоднорідна задача для систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами // Мат. вісник НТШ. — 2004. — **1**. — С. 47-58.
2. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 58. — С. 139-143.
3. *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними// Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2002. — **45**, № 4. — С. 87-94.
4. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1999. — Вип. 54. — С. 84-95.
5. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. — 2001. — № 11. — С. 57-64.
6. *Ільків В. С.* Крайова задача з нелокальними двоточковими умовами для гіперболічного рівняння другого порядку // Вісник нац. ун-ту. „Львівська політехніка“. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 566. — С. 41-51.
7. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Нелокальна двототочкова задача для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку // Мат. вісник НТШ. — 2006. — **3**. — С. 69-83.
8. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку // Мат. вісник НТШ. — 2007. — **4**. — С. 107-115.
9. *Гой Т. П.* Нелокальна крайова задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння // VI-а Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука: Матеріали конф. — Київ. — 1997. — С. 108.
10. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. — К.: Ин-т мат. НАН Украины. — 1996. — С. 74-76.
11. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 2. — С. 186-195.
12. *Полищук В. Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. — К.: Наук. думка. — 1979. — С. 54-65.
13. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук.думка, 1984. — 264 с.
14. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наук. думка, 2002. — 416 с.

15. *Илькив В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда. — Деп. в НИИЭИР. Сб. реф. деп. рук. ВИМИ, 1991. — Вып. 5, № 3-8836. — 10 с.

16. *Higham N. J.* Accuracy and stability of numerical algorithms. — SIAM, 1996. — 688 p.

Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна.

Надійшло 10.03.2009

Il'kiv V.S. *The smoothness of solutions of the problems with nonlocal multi-point conditions for strictly hyperbolic equations*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 47–58.

We consider the problem with nonlocal multi-point boundary conditions for high order in time strictly hyperbolic equation with variable coefficients in Cartesian product of the time interval and the spatial multidimensional torus. We establish the solvability of this problem in the Sobolev spaces scale for almost all (except for the set of a given small measure) vectors of coefficients in the nonlocal conditions. We prove the metric theorem of the lower estimation of small (nonlinear) denominators of the problem.

Илькив В.С. *Гладкость решений задач с нелокальными многоточечными условиями для строго гиперболических уравнений // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 47–58.

В декартовом произведении часового отрезка и пространственного многомерного тора для строго гиперболического уравнения с переменными коэффициентами исследованы условия разрешимости задачи с многоточечными нелокальными условиями. С помощью метричного подходу встановлено существование и единственность решения в шкале пространств Соболева. Доказано теорему об оценках снизу малых знаменателей, которые возникают в процессе построения этого решения. Установлена зависимость между гладкостью решения, гладкостью правых частей задачи и коэффициентами граничных условий.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.948

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНОСТОРОННЬОЮ ЛІПШИЦІЄВІСТЮ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Диференціальні нерівності з односторонньою ліпшицієвістю // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 59–64.

Отримано нові результати про диференціальні нерівності за припущень, які є слабшими за умову Ліпшиця.

Численні застосування інтегральних, диференціальних та інших класів операторних нерівностей стимулюють інтерес до їх теорії, започаткованої Пеано в 1885 – 1886 роках (див., напр., [2, с. 60]). Обширну бібліографію щодо цього можна знайти в [4]. Поява нових досліджень про операторні, зокрема інтегральні нерівності (див., напр., [5, 3] та бібліографію в них) спонукає звернутись до запропонованої М. С. Курпелем методики побудови і обгрунтування тверджень про двосторонні операторні нерівності (див., напр., [1]).

В теорамах про строгі диференціальні нерівності, в яких з нерівностей

$$p'(t) < f(t, p(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]), \quad p(t_0) \leqslant x(t_0)$$

випливає нерівність $p(t) < x(t)$ при $t \in (t_0, t_2)$, $(t_2 \in [t_0, t_1])$ з неперервно диференційовними функцією $p(t)$ та розв'язком $x(t)$ рівняння

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

вимагається неперервності $f(t,x)$ по сукупності аргументів, а в теоремах про нестрогі диференціальні нерівності, в яких із співвідношень $u'(t) \leqslant f(t, u(t))$, $u(t_0) \leqslant x(t_0)$ випливає $u(t) \leqslant x(t)$ при $t \geqslant t_0$, нерідко фігурує умова Ліпшиця для $f(t,x)$ щодо x.

Пропонована замітка присвячена диференціальним нерівностям для рівнянь (1) з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

за припущення, що функція $f(t,x)$ задовольняє умову Ліпшиця в неповному об'ємі. Одержані результати можна розглядати як покращення відповідних результатів із [2]

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A40.

у зв'язку з наведеними в [2, с. 40, 49] твердженнями про однозначну розв'язність та оцінку розв'язку скалярного диференціального рівняння (1).

Вважатимемо $f(t,x)$ неперервною при $t \in [t_0,t_1]$, $x \in S(x_0) = \{x||x-x_0| \leqslant M, x, x_0 \in R^1\}$ функцією ($-x < t_0 < t_1 < \infty$, R^1 — множина дійсних чисел).

Умовою A назвемо припущення про існування неперервної і невід'ємної при $t \in [t_0,t_1]$ функції $l_1(t)$, для якої із співвідношень $t \in [t_0,t_1]$, $y,z \in S(x_0)$, $y \leqslant z$ випливає нерівність

$$f(t,z) - f(t,y) =\leqslant l_1(t)(z-y).$$

Теорема 1. *Нехай: 1) виконана умова A; 2) існує неперервно диференційовний на $[t_0,t_1]$ розв'язок $x(t)$ задачі (1), (2); 3) задані неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$, які при $t \in [t_0,t_1]$ задовольняють нерівності*

$$u'(t) \leqslant f(t,u(t)), \quad v'(t) \geqslant f(t,v(t)), \tag{3}$$

при чому

$$u(t_0) \leqslant x(t_0) \leqslant v(t_0). \tag{4}$$

Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0,t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) при $t \in [t_0,t_1]$ справджуються оцінки

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t). \tag{5}$$

Доведення. Припустимо існування множини D таких значень $t \in [t_0,t_1]$, для яких не виконується хоч одне із співвідношень (5). Позначимо $t^* = \inf D$. Очевидно, що $t^* \in [t_0,t_1]$, t^* не належить D, якщо множина D не є порожньою. Нехай $t_2 \in D$ таке, що $u(t_2) > x(t_2)$ або $x(t_2) > v(t_2)$. Приймемо для конкретності, що $u(t_2) > x(t_2)$. Тоді $u(t) > x(t)$ у деякому околі точки t_2, бо $u(t)$ та $x(t)$ — неперервні. Без обмеження загальності і задля спрощення міркувань вважатимемо, що $u(t) > x(t)$ при $t \in [t^*,t_2]$. Скориставшись з (1), (3) та умови A, на $[t^*,t_2]$ будемо мати

$$x'(t) - u'(t) \geqslant f(t,x(t)) - f(t,u(t)) \geqslant -l_1(t)(u(t)-x(t)) = l_1(t)(x(t)-u(t)).$$

Позначивши $w(t) = x(t) - u(t)$, отримаємо

$$w'(t) = l_1(t)w(t) + \delta(t), \quad w'(t^*) = 0, \tag{6}$$

де $\delta(t)$ — деяка невід'ємна неперервна при $t \in [t^*,t_2]$ функція. Оскільки явний розв'язок задачі (6) має вигляд

$$w(t) = \int_{t^*}^{t} \delta(s) e^{\int_s^t l_1(\xi)d\xi} ds,$$

то $w(t) \geqslant 0$ при $t \in [t^*,t_2]$. Отримана суперечність з припущенням доводить справедливість твердження теореми щодо оцінок (5).

З неперервності $f(t,x)$ випливає існування нижнього $y(t)$ і верхнього $z(t)$ розв'язків задачі (1), (2). Тоді

$$z'(t) - y'(t) = f(t,z(t)) - f(t,y(t)) \leqslant l_1(t)(z(t)-y(t)).$$

Позначивши $z(t) - y(t) = \varphi(t)$, матимемо

$$\varphi'(t) = l_1(t)\varphi(t) - \tau(t), \quad \tau(t^*) = 0 \tag{7}$$

де $\tau(t)$ — неперервна невід'ємна при $t \in [t_0,t_1]$ функція. З явного вигляду розв'язку

$$\varphi(t) = -\int_{t_0}^{t} \tau(s) e^{\int_s^t l_1(\xi)d\xi} ds$$

задачі (7) робимо висновок, що $\varphi(t) \leqslant 0$. Одержана нерівність суперечить тому, що $z(t) \leqslant y(t)$ для будь-якого $t \in [t_0,t_1]$ і $y(t) \neq z(t)$ бодай для одного значення $t \in [t_0,t_1]$. Тому $z(t) = y(t)$ для будь-якого $t \in [t_0,t_1]$, тобто розв'язок задачі (1), (2) — єдиний. Теорему доведено. □

Зауважимо, що праві і ліві частини нерівностей (3)–(5) взаємно незалежні, тому теорему 1 можна було б подати у вигляді двох окремих теорем.

Назвемо умовою B припущення про існування невід'ємної неперервної при $t \in [t_0,t_1]$ функції $l_2(t)$, для якої із співвідношень $t \in [t_0,t_1]$, $y \leqslant z$, $y,z \in S(x_0)$ випливає нерівність

$$-l_2(t)(z-y) \leqslant f(t,z) - f(t,y).$$

Теорема 2. *Нехай: 1) виконана умова B; 2) при $t \in [t_0,t_1]$ існує неперервно диференційовний розв'язок $x(t)$ задачі (1), (2); 3) система рівнянь*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,z(t)) - l_2(t)(z(t)-y(t)), \\ z'(t) &= f(t,y(t)) + l_2(t)(z(t)-y(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

з початковими умовами

$$y(t_0) = z(t_0) = x_0 \tag{9}$$

має єдиний розв'язок $(y(t),z(t))$ з неперервно диференційовними на $[t_0,t_1]$ компонентами $y(t)$, $z(t)$; 4) задані неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(y)$, для яких

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t,v(t)) - l_2(t)(v(t)-u(t)), \\ v'(t) &= f(t,u(t)) + l_2(t)(v(t)-u(t)), \quad t \in [t_0,t_1], \end{aligned}$$

$$u(t_0) \leqslant x(t_0) = x_0 \leqslant v(t_0). \tag{10}$$

Тоді для єдиного неперервного диференційовного розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) при $t \in [t_0,t_1]$ справджуються оцінки (5).

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_n'(t) &= f(t,\psi_n(t)) - l_2(t)(\psi_n(t)-\varphi_n(t)) + \tfrac{1}{n}, \\ \psi_n'(t) &= f(t,\varphi_n(t)) + l_2(t)(\psi_n(t)-\varphi_n(t)) - \tfrac{1}{n}, \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots) \end{aligned} \tag{11}$$

з початковими умовами

$$\varphi_n(t_0) = \psi_n(t_0) = x_0 \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots).$$

Якщо $d > 0$, то при $(t, \varphi, \psi) \in D_1 = \{(t, \varphi, \psi) | t \in [t_0, t_1], \quad |\varphi - x_0| \leqslant d, \quad |\psi - x_0| \leqslant d\}$ неперервні функції

$$f(t, \psi(t)) - l_2(t)(\psi(t) - \varphi(t)) + \frac{1}{n}, \quad f(t, \varphi(t)) + l_2(t)(\psi(t) - \varphi(t)) - \frac{1}{n}, \tag{12}$$

як функції від t, обмежені в сукупності. Використовуючи методику Тонеллі (див. [2, с.21, 22, 38]), розглянемо ітераційний процес

$$\varphi_{n,k+1}(t) = \varphi_{n,0}(t), \quad \psi_{n,k+1}(t) = \psi_{n,0}(t) \quad (t \in [t_0 - \frac{1}{k}, t_0]), \tag{13}$$

$$\varphi_{n,k+1}(t) = \varphi_{n,0}(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds - \int_{t_0}^{t} l_2(s)(\psi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}) - \varphi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds + \tfrac{t - t_0}{n}$$

$$\psi_{n,k+1}(t) = \psi_{n,0}(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds + \int_{t_0}^{t} l_2(s)(\psi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}) - \varphi_{n,k}(s - \tfrac{1}{k}))ds - \tfrac{t - t_0}{n} \tag{14}$$

де $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{k}]$, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots,$ k_0 — яке-небудь натуральне число, для якого $\frac{1}{k_0} < \delta, \quad \delta > 0$. Неперервно диференційовні на $[t_0 - \delta, t_0]$ функції $\varphi_{n,0}(t)$, $\psi_{n,0}(t)$ вважаємо заданими так, щоб

$$\varphi_{n,0}(t_0) = \psi_{n,0}(t_0) = x_0,$$

$$\varphi'_{n,0}(t_0) = f(t_0, \psi_{n,0}(t_0)) - l_2(t_0)(\psi_{n,k}(t_0) - \varphi_{n,k}(t_0)),$$
$$\psi'_{n,0}(t_0) = f(t_0, \varphi_{n,0}(t_0)) + l_2(t_0)(\psi_{n,k}(t_0) - \varphi_{n,k}(t_0)),$$

$$|\varphi_{n,0}(t) - x_0| \leqslant d, \quad |\psi_{n,0}(t) - x_0| \leqslant d, \quad |\varphi'_{n,0}(t)| \leqslant M, \quad |\psi'_{n,0}(t)| \leqslant M \quad (t \in [t_0 - \delta, t_0]).$$

Функції $\varphi_{n,k+1}(t)$, $\psi_{n,k+1}(t)$ за допомогою відомого в теорії диференціальних рівнянь із запізненням аргументу методу кроків можна продовжити на сегмент $[t_0, t_0 + \alpha]$, де

$$\alpha = \min\left\{t_1 - t_0, \frac{d}{M}\right\}.$$

Послідовності $\{\varphi_{n,k}(t)\}$, $\{\psi_{n,k}(t)\}$ для кожного фіксованого n рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні. З них можна виділити збіжні підпослідовності, кожна з яких збігається рівномірно на $[t_0, t_0 + \alpha]$ до $\varphi_n(t)$ та $\psi_n(t)$ відповідно. При цьому $(\varphi_n(t), \psi_n(t))$ — розв'язок задачі (13), (14). Оскільки функції (12) обмежені в сукупності, наприклад, константою M_1, то $|\varphi'_n(t)| \leqslant M_1$, $|\psi'_n(t)| \leqslant M_1$. Отже, на $[t_0, t_0 + \alpha]$ послідовності $\{\varphi_n(t)\}$ та $\{\psi_n(t)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні. Лема Арцела дає підставу виділити з них підпослідовності, які на $[t_0, t_0 + \alpha]$ збігаються рівномірно до границь $y(t)$ та $z(t)$ відповідно. Праві частини рівностей (11) збігаються відповідно до

$$f(t, z(t)) - l_2(t)(z(t) - y(t)), \quad f(t, y(t)) + l_2(t)(z(t) - y(t)).$$

Тому $(y(t), z(t))$ є розв'язком задачі (8), (9) (див., напр., [2]). Умови 2) та 3) теореми дозволяють вважати, що можна виділити підпослідовності $\{\varphi_{n_m}(t)\}$, $\{\psi_{n_m}(t)\}$ послідовностей $\{\varphi_n(t)\}$, $\{\psi_n(t)\}$ відповідно, які збігаються рівномірно на $[t_0, t_0 + \alpha]$ до єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, t_0 + \alpha]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2).

Перейдемо до доведення нерівностей

$$u(t) < \varphi_n(t), \quad v(t) > \psi_n(t) \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots) \tag{15}$$

на напівінтервалі $(t_0, t_0 + \alpha]$. Очевидно, що $u'(t_0) < \varphi'_n(t_0)$, $v'(t_0) > \psi'_n(t_0)$. Тому знайдеться $t \in (t_0, t_0 + \alpha]$ таке, що при $t \in (t_0, t_2)$ виконуються нерівності (15). Припускаючи, що ці нерівності справджуються не на всьому $(t_0, t_1]$, допустимо існування такого $t_3 \in (t_1, t_0 + \alpha)$, що при $t \in (t_0, t_3)$ виконуються нерівності (15), а при $t = t_3$ будемо мати

$$u(t_3) \leqslant \varphi_n(t_3), \quad v(t_3) \geqslant \psi_n(t_3) \tag{16}$$

і при цьому бодай одне із співвідношень (16) є рівністю. Нехай для визначеності $u(t_3) = \varphi_n(t_3)$. Тоді з умови B отримуємо

$$\varphi'_n(t_3) = f(t_3, \psi_n(t_3)) - l_2(t_3)(\psi_n(t_3) - \varphi_n(t_3)) + \frac{1}{n} \geqslant$$

$$f(t_3, v(t_3)) - l_2(t_3)(v(t_3) - u(t_3)) + \frac{1}{n} \geqslant u'(t_3) + \frac{1}{n} > u'(t_3). \tag{17}$$

Оскільки

$$\varphi'_n(t_3) = \lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{\varphi_n(t_3 + \Delta t) - \varphi_n(t_3)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{u(t_3 + \Delta t) - u(t_3)}{\Delta t} = u'(t_3),$$

то одержана суперечність із строгою нерівністю (17) доводить, що на $(t_0, t_0 + \alpha)$ нерівності (15) виконуються. За допомогою граничного переходу приходимо до співвідношень (10) для $t \in (t_0, t_0 + \alpha)$.

Залишається довести можливість продовження оцінок (10) на $[t_0, t_1]$. Припускаючи протилежне, вважатимемо, що $t_0 + \alpha < t_1$ і що знайдеться $t' \in (t_0 + \alpha, t_1]$ таке, що при $t = t'$ хибне принаймні одне із співвідношень (10). Нехай t^* — точна нижня грань таких t', для яких на деякому інтервалі (t^*, t_4) $(t_4 \leqslant t_1)$ якесь одне із співвідношень (або обидва) є хибним. Побудуємо послідовності функцій $\{\overline{\varphi}_n(t)\}$, $\{\overline{\psi}_n(t)\}$, визначаючи $(\overline{\varphi}_n(t), \overline{\psi}_n(t))$ як розв'язок системи рівнянь

$$\overline{\varphi'}_n(t) = f(t, \overline{\psi}_n(t)) - l_2(t)(\overline{\psi}_n(t) - \overline{\varphi}_n(t)) + \tfrac{1}{n},$$
$$\overline{\psi'}_n(t) = f(t, \overline{\varphi}_n(t)) + l_2(t)(\overline{\psi}_n(t) - \overline{\varphi}_n(t)) - \tfrac{1}{n} \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$$

з початковими умовами

$$\overline{\varphi}_n(t^*) = \overline{\psi}_n(t^*) = x(t^*).$$

Міркуючи так само, як при розгляді ситуації для $[t_0, t_0 + \alpha]$, приходимо до висновку про існування сегменту $[t^*, t^* + \alpha_1] \subseteq [t^*, t_1]$, на якому справджуються оцінки (10). Це суперечить припущенню про неможливість продовження співвідношень (10) правіше за t^* і означає, що теорему доведено повністю. □

Теореми 1 та 2 є новими, якщо $l_1(t) \neq 0$ та $l_2(t) \neq 0$. При $l_1(t) = 0$ та $l_2(t) = 0$ отримуються відповідні результати із [4] (див. також [2, с. 40, 49]).

Література

1. Курпель Н. С., Шувар Б. В. *Двусторонние операторные неравенства и их применение.* — Киев: Наук. думка. — 1980. — 267 с.
2. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Мир. — 1973. — 720 с.

3. Matarazzo G., Pecoraro M., Tucci D., *About new Bihari's lemma for discontinuous functions* // Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. — Київ: 2008. — С. 722–724.

4. Rabczuk R., *Elementy nierówności różniczkowych*, Warszwa: PWN, 1976, 276 s.

5. Verygina I., Piccirillo A. M., Angela Gallo, *About some generalization Bihari result for integro-sum inequalities for discontinuous functions of n-independent variables* // Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. — Київ: 2008. — С. 540–542.

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 24.02.2009

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *Differential inequalities with one-sided Lipshitz property*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 59–64.

New results on differential inequalities under assumptions, which are weaker than the Lipshitz conditions, are obtained.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Дифференциальные неравенства с односторонней липшицевостью* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 59–64.

Получено новые результаты о дифференциальных неравенствах, которые являются более слабыми, чем условие Липшица.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, №1

УДК 515.12+512.58

Ліщинський І.І.

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЖОРДАНА КІЛЕЦЬ ПОЛІНОМІВ

Ліщинський І.І. *Диференціювання Жордана кілець поліномів* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 65–68.

В даній статті встановлено зв'язок між множиною диференціювань Жордана кільця R та множинами диференціювань Жордана кільця поліномів $R[x_1,\dots,x_n]$ та кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1,\dots,x_n]]$. Встановлено також умову, за якої $JDerR$ є лівим R-модулем.

0. Нехай R – асоціативне кільце. Відображення $\delta : R \to R$ називається диференціюванням Жордана кільця R, якщо $\delta(x+y)=\delta(x)+\delta(y)$ та $\delta(x^2)=\delta(x)x+x\delta(x)$ для всіх елементів $x, y \in R$ (див. [1],[2]). Множину всіх диференціювань Жордана кільця R звичайно позначають через $JDerR$. Очевидним є те, якщо c – елемент центру $Z(R)$, а $d_1, d_2 \in JDerR$, то $cd_1, d_1 \pm d_2 \in JDerR$, тобто $JDerR$ – лівий $Z(R)$-модуль. Вважається, що кільце вільне від 4-скруту, якщо з рівності $4x=0$ випливає $x=0$.

Метою даної статті є встановити зв'язок між множиною диференціювань Жордана кільця R та множинами диференціювань Жордана кільця поліномів $R[x_1,\dots,x_n]$ та кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1,\dots,x_n]]$. Знайдено також умову, за якої $JDerR$ є лівим R-модулем.

1. Нехай I – зліченна множина. Тоді родина диференціювань Жордана $\delta=\{\delta_i | i \in I\}$ кільця R називається локально скінченною, якщо для кожного елемента $a \in R$ маємо $\delta_i(a)=0$ майже для всіх індексів $i \in I$. Через $(jDerR)^\infty$ позначимо сукупність всіх локально скінченних родин диференціювань Жордана кільця R, а через $(JDerR)^\infty$ – сукупність всіх родин диференціювань Жордана кільця R.

Твердження 1. *Нехай $R[x_1,\dots,x_n]$ – кільце поліномів від n комутуючих змінних $x_1,\dots,x_n$ над кільцем R і вільне від 4-скруту. Тоді має місце ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$JDerR[x_1,\dots,x_n] \cong (jDerR)^\infty \oplus Z(R)[x_1,\dots,x_n]^n.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Доведення. 1) Нехай D – яке-небудь диференціювання Жордана кільця поліномів $R[x_1,\dots,x_n]$. Тоді для кожного елемента $r \in R$ його похідна $D(r) \in R[x_1,\dots,x_n]$. Оскільки $R[x_1,\dots,x_n]$ – підкільце в кільці формальних степеневих рядів $R[[x_1,\dots,x_n]]$, то формально $D(r)$ можна записати у вигляді степеневого ряду (в якому майже всі коефіцієнти є нульовими):

$$D(r) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n} \delta_{i_1\dots i_n}(r)x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n},$$

де $\delta_{i_1\dots i_n}(r) \in R$ для кожної n-ки $(i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Легко встановити, що відображення $\delta : R \to R$, де $\delta(r) = \delta_{i_1\dots i_n}(r) \quad (r \in R)$, є диференціюванням Жордана кільця R і, як наслідок, родина диференціювань Жордана

$$\delta = \{\delta_{i_1\dots i_n} | (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}_0^n\} \tag{1}$$

кільця R є локально скінченною.

2) Тепер нехай $d_j = D(x_j)$, де $j = 1,\dots,n$. Тоді

$$d_j = \sum a_{i_1\dots i_n}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} \tag{2}$$

– деякий поліном кільця $R[x_1,\dots,x_n]$. Розглянемо як діє диференціювання Жордана на добуток комутуючих між собою елементів $s,t \in R[x_1,\dots,x_n]$, для цього знаходимо

$$4D(st) = D(4st) = D((s+t)^2 - (s-t)^2) = D((s+t)^2) - D((s-t)^2) =$$

$$= 2(s+t)D(s+t) - 2(s-t)D(s-t) = 4(sD(t) + D(s)t).$$

А оскільки дане кільце вільне від 4-скруту, то $D(st) = sD(t) + D(s)t$. Позаяк $ax_j = x_ja$ та $D(a)x_j = x_jD(a)$ для кожного $a \in R$, то

$$aD(x_j) = D(x_j)a,$$

а звідси

$$\sum aa_{i_1\dots i_n}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} = \sum a_{i_1\dots i_n}ax_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}.$$

Оскільки a – довільний елемент із R, то $a_{i_1\dots i_n} \in Z(R)$ для всіх коефіцієнтів полінома d_j. Це означає, що $d_j \in Z(R)[x_1,\dots,x_n]$.

Підсумовуючи 1) та 2), легко встановити, що відображення

$$\varphi : JDerR[x_1,\dots,x_n] \to (jDerR)^\infty \oplus Z(R)[x_1,\dots,x_n]^n,$$

де $\varphi(D) = (\delta, d_1,\dots,d_n)$, δ – локально скінченна родина (1) диференціювань Жордана кільця R, а d_j – поліном (2), є ізоморфізмом лівих $Z(R)$-модулів. □

Твердження 2. *Нехай $R[[x_1,\dots,x_n]]$ – кільце формальних степеневих рядів від n комутуючих змінних $x_1,\dots,x_n$ над кільцем R і вільне від 4-скруту. Тоді має місце ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$JDerR[[x_1,\dots,x_n]] \cong (JDerR)^\infty \oplus Z(R)[[x_1,\dots,x_n]]^n.$$

Доведення. Аналогічне доведенню твердження 1, а тому ми його опускаємо. □

2. Зрозуміло, якщо кільце R комутативне, то $JDerR$ – лівий R-модуль. Але існують кільця R, які не є комутативними і $JDerR$ є лівим R-модулем. Нами встановлено:

Твердження 3. *Нехай R – кільце. Тоді $JDerR$ – лівий R-модуль в тому і тільки тому випадку, коли*

$$(ax - xa)\delta(x) = 0$$

для будь-яких $a, x \in R$ та $\delta \in JDerR$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $JDerR$ – лівий R-модуль. Тоді для будь-яких $\delta \in JDerR$ та $a, x \in R$ маємо

$$a\delta(x)x + xa\delta(x) = (a\delta)(x^2) = a(\delta(x^2)) = a(\delta(x)x + x\delta(x)) = a\delta(x)x + ax\delta(x),$$

а звідси

$$(ax - xa)\delta(x) = 0.$$

($\Leftarrow$) встановлюється безпосередньо. □

Приклад 1. *Розглянемо поле $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2/(X^2+X+1) = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$, яке має нетривіальний автоморфізм $\sigma : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$, $\sigma(x) = x^2$ для кожного $x \in \mathbb{F}_4$. Нехай $B = \mathbb{F}_4[X,\sigma]/(X^2) = \mathbb{F}_4 + \mathbb{F}_4 b$, де $b^2 = 0$ та $bx = \sigma(x)b$ для всіх $x \in \mathbb{F}_4$. Очевидним є те, що $JDer\mathbb{F}_4 = Der\mathbb{F}_4 = \{0\}$.*

Нехай $\delta \in DerB$. Тоді $\delta(b) = x + yb$ для деяких елементів $x, y \in \mathbb{F}_4$. Із рівності

$$0 = \delta(b^2) = \delta(b)b + b\delta(b) = (x+yb)b + b(x+yb) = xb + bx = (x+x^2)b \tag{3}$$

випливає, що $x + x^2 = 0$. Це означає, що $x = x^2$, а отже, $x = 0$ або $x = 1$. Правило

$$\delta_z : B \to B, \quad \delta_z(x+yb) = zyb, \text{ де } x,y,z \in \mathbb{F}_4,$$

є диференціюванням, оскільки для всіх $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F}_4$ вірними є рівності:

$$\delta_z((x_1+y_1b)(x_2+y_2b)) = \delta(x_1x_2 + (x_1y_2 + y_1x_2^2)b) = z(x_1y_2 + y_1x_2^2)b,$$

$$\delta_z(x_1+y_1b)(x_2+y_2b) + (x_1+y_1b)\delta_z(x_2+y_2b) = zy_1b(x_2+y_2b) + (x_1+y_1b)zy_2b = (zy_1x_2^2 + x_1zy_2)b.$$

Покажемо, що правило

$$\mu_z : B \to B, \quad \mu_z(x+yb) = y(1+zb), \text{ де } x,y,z \in \mathbb{F}_4,$$

не є диференціюванням:

$$\mu_z((\alpha+b)^2) = \mu_z(\alpha^2 + \alpha b + b\alpha) = \mu_z(\alpha^2 + b) = \mu_z(b) = 1 + zb,$$

$$\mu_z(\alpha+b)(\alpha+b) + (\alpha+b)\mu_z(\alpha+b) = (1+zb)(\alpha+b) + (\alpha+b)(1+zb) = zb.$$

Отже, $DerB = \{\delta_z | \ z \in \mathbb{F}_4\}$ *– алгебра Лі, яка складається з 4 елементів. Зрозуміло, що* $DerB \subseteq JDerB$. *Знайдемо диференціювання Жордана кільця* B, *які не є його диференціюваннями.*

Нехай $\delta \in JDerB$. *Тоді* $\delta(b) = x + yb$ *для деяких* $x, y \in \mathbb{F}_4$. *З рівності (3) отримуємо, що* $x = 0$ *або* $x = 1$. *Випадок* $x = 1$ *не підходить (контрприклад можна розглянути той самий, що і для диференціювання). Встановимо, що правило:*

$$\delta_z : B \to B, \quad \delta_z(x + yb) = z(y)b,$$

де $x, y, \in \mathbb{F}_4$ *та* $z(y) : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$ *– адитивне відображення поля* $\mathbb{F}_4$, *є диференціюванням Жордана кільця* B. *Дійсно,*

$$\delta((x + yb)^2) = \delta(x^2 + (xy + yx^2)b) = \delta(x^2 + y(x + x^2)b) = z(y(x + x^2))b,$$

$$\delta(x + yb)(x + yb) + (x + yb)\delta(x + yb) = z(y)b(x + yb) + (x + yb)z(y)b = (x^2 + x)z(y)b.$$

Якщо $x = 0$ *або* $x = 1$, *то* $x + x^2 = 0$; *а якщо* $x = \alpha$ *або* $x = \alpha + 1$, *то* $x + x^2 = 1$. *Тоді рівність* $\delta((x + yb)^2) = \delta(x + yb)(x + yb) + (x + yb)\delta(x + yb)$ *вірна для всіх* $x, y \in \mathbb{F}_4$. *Оскільки* $z(0) = 0$, *а* $z(\alpha + 1) = z(\alpha) + z(1)$, *тобто* $z(\alpha)$ *і* $z(1)$ *можуть набувати довільних значень із поля* $\mathbb{F}_4$, *то лівий* B*-модуль* $JDerB$ *містить 16 елементів.*

Література

1. Бурков В.Д. *Дифференцирования колец многочленов* // Вестник Москов. унив., сер. мех.-мат. — 1981, №2. — С.51-52.

2. Herstein I.N., *Jordan derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 1104–1110.

Прикарпатський університет ім. Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна,
lishchynsky@ukr.net

Надійшло 06.04.2009

Lishchynsky I.I. *Jordan derivations of polynomial rings*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 65–68.

We study connections between the set of Jordan derivations of a ring R and the sets of Jordan derivations of a polynomial ring $R[x_1, \ldots, x_n]$ and formal power series ring $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. We also establish a condition when $JDerR$ is a left R-module.

Лищинский И.И. *Дифференцирования Жордана колец многочленов // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 65–68.

Установлена связь между множеством дифференцирований Жордана кольца R и множествами дифференцирований Жордана кольца многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$ и кольца формальных степенных рядов $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. Установлено также условие, при котором $JDerR$ будет левым R-модулем.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.98

Можировська З.Г.

Нормальні та самоспряжені оператори композиції на просторах аналітичних функцій

Можировська З.Г. *Нормальні та самоспряжені оператори композиції на просторах аналітичних функцій // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 69–78.

В статті розглядаються спектральні властивості нормальних операторів композиції, а також досліджуються деякі властивості самоспряжених операторів композиції на просторах аналітичних функцій гільбертового простору.

Вступ

Серед лінійних операторів, що діють на просторах аналітичних функцій вирізняються оператори композиції з аналітичними відображеннями, які не виводять за межі даного класу функцій. Точніше, нехай U_1, U_2 — відкриті множини у комплексних банахових просторах X_1 та X_2 і $\mathcal{A}_1$ та $\mathcal{A}_2$ — деякі лінійні простори аналітичних функцій на U_1 та U_2 відповідно. Якщо $F : X_1 \to X_2$ — аналітичне відображення таке, що $f(F(x)) \in \mathcal{A}_1$ для кожної функції $f \in \mathcal{A}_2$, то відображення $T_F : f \mapsto f \circ F$ є лінійним оператором з $\mathcal{A}_2$ в $\mathcal{A}_1$.

В 1960-х роках Й. Риф [15], Е. Нордгрен [13] та Г. Шварц [16] описали зв'язок між властивостями операторів композиції та теорією функцій. Їхні досягнення поклали початок активній діяльності з вивчення операторів композиції, яка включає дослідження спектру ([7, 8, 11, 10]) і компактності ([12, 17]).

Спектральні властивості лінійних операторів добре описані у відомих працях У. Рудіна [5], Н. Данфорда й Дж. Т. Шварца [3], а також Н.І. Ахієзера, І.М. Глазмана [1]. В даній статті досліджено ці ж властивості для операторів композиції на просторах аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Також в статті розглядаються властивості самоспряжених операторів композиції. Відомо, що не завжди, спряжений оператор до оператора композиції T_F буде оператором композиції. В даній роботі ми розглянемо умови, при яких T_F є самоспряженим оператором композиції.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.

1 Попередні відомості

Спектральна теорема в нескінченновимірному гільбертовому просторі відповідає класичній теоремі лінійної алгебри про зведення ермітової матриці до діагонального вигляду в n-вимірному просторі.

Нехай T — лінійний обмежений оператор в гільбертовому просторі E, T^* — спряжений оператор , (x, y) — скалярний добуток в E, $x, y \in E$. За означенням $(Tx, y) = (x, T^*y)$.

Означення 1.1. *Оператор T називається нормальним, якщо $TT^* = T^*T$.*

Наведемо деякі відомі результати зі спектральної теорії нормальних операторів (див. [3]). Будемо позначати $\rho(T)$ — резольвентна множина, $\sigma(T)$ — спектр оператора T, λ — власне значення оператора T.

Спектральні множини визначаються як підмножини спектру $\sigma(T)$, які одночасно відкриті та замкнені в топології простору.

Кожній спектральній множині σ відповідає проектор

$$\mathcal{E}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\sigma)} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda, \tag{1}$$

де $C(\sigma)$ — довільна орієнтована жорданова крива в резольвентній множині $\rho(T)$, яка охоплює σ. Ці проектори задовольняють такі відношення:

$$\mathcal{E}(\sigma \cap \delta) = \mathcal{E}(\sigma) \cap \mathcal{E}(\delta),$$

$$\mathcal{E}(\sigma \cup \delta) = \mathcal{E}(\sigma) \vee \mathcal{E}(\delta) = \mathcal{E}(\sigma) + \mathcal{E}(\delta) - \mathcal{E}(\sigma \cap \delta),$$

$$\mathcal{E}(\sigma(T)) = I, \qquad \mathcal{E}(\varnothing) = 0, \tag{2}$$

де σ і δ — довільні спектральні множини, I — одиничний оператор, $\varnothing$ — порожня множина.

Відношення (2) показують, що відповідність $\sigma \to \mathcal{E}(\sigma)$ є гомоморфним відображенням булевої алгебри спектральних множин на булеву алгебру проекторів $\mathcal{X}$. Крім того, цей гомоморфізм переводить одиницю $\sigma(T)$ алгебри спектральних множин в одиницю I алгебри проекторів.

Спектральною мірою в банаховому просторі $\mathcal{X}$ називається гомоморфне відображення булевої алгебри множин в булеву алгебру проекторів в $\mathcal{X}$, яке переводить одиницю вихідної алгебри в одиничний оператор I.

Отже, за співвідношенням (1) з кожним обмеженим оператором T в комплексному банаховому просторі пов'язана спектральна міра $\mathcal{E}$, яка визначена на сім'ї спектральних множин оператора T. Ця спектральна міра пов'язана з T також співвідношеннями:

$$\mathcal{E}(\delta)T = T\mathcal{E}(\delta), \qquad \sigma(T_\delta) = \delta, \tag{3}$$

де δ — довільна спектральна множина оператора T, а $\sigma(T_\delta)$ — спектр звуження T_δ оператора T на підпростір $\mathcal{X}_\delta = \mathcal{E}(\delta)\mathcal{X}$.

Нормальний оператор T в гільбертовому просторі E породжує спектральну міру, яка визначена на булевій алгебрі $\mathcal{B}$ всіх борелівських множин комплексної площини і задовольняє умові (3) для всіх $\delta \in \mathcal{B}$. Ця спектральна міра, яка пов'язана з нормальним оператором є зліченно адитивною на $\mathcal{B}$ в сильній операторній топології. Це означає, що

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}(\delta_i)x = \mathcal{E}\left(\cup_{i=1}^{\infty}\delta_i\right)x, \tag{4}$$

$x \in X$, $\{\delta_i\}$ — довільна послідовність множин, які не перетинаються.

Спектральна міра $\mathcal{E}$, яка визначена на борелівських множинах комплексної площини і яка задовольняє умові (3) для кожної борелівської множини δ і умові (4) для будь-якої послідовності неперетинних борелівських множин $\{\delta_i\}$, називається *розкладом одиниці* для оператора T.

Спектральна теорема для обмежених нормальних операторів в гільбертовому просторі стверджує, що кожний такий оператор має однозначно визначений розклад одиниці (див. [3]).

Теорема 1. *Обмежений нормальний оператор T однозначно визначає на борелівських множинах комплексної площини регулярну зліченно адитивну самоспряжену спектральну міру $\mathcal{E}$, яка перетворюється в нуль на $\rho(T)$ і володіє тією властивістю, що*

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\mathcal{E}(d\lambda), \qquad f \in C(\sigma(T)).$$

Однозначно визначена спектральна міра в цій теоремі є розкладом одиниці для T.

Теорема 2. *Регулярна зліченно адитивна самоспряжена спектральна міра $\mathcal{E}$, яка визначена на борелівських множинах комплексної площини, тоді і тільки тоді є розкладом одиниці для нормального оператора T, коли $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\mathcal{E}(d\lambda)$.*

Побудуємо простір на якому розглянемо спектральні властивості операторів композиції.

Простори $\mathcal{H}_\eta$ будуються як спряжені до абстрактних симетричних просторів Фока $\mathcal{F}_\eta$ над простором E. Тобто $\mathcal{F}_\eta$ є зважені ℓ_2-суми симетричних гільбертових тензорних добутків простору E. Таким чином, кожна функція $f \in \mathcal{H}_\eta$ має вигляд $f(x) = \langle \eta(x) \mid \overline{f}\rangle$, де $\overline{f}$ — деякий елемент з $\mathcal{F}_\eta$, $x \in E$, а $\eta : U \to \mathcal{F}_\eta$ — вкладення з $U \in E$ в $\mathcal{F}_\eta$. Відображення η має вигляд

$$\eta(x) = \sum_{k_1+\dots+k_n=0}^{\infty} \sum_{i_1<\dots<i_n} c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n} x_{i_1}^{k_1}\dots x_{i_n}^{k_n} e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n} =$$

$$= \sum_{|(k)|=0}^{\infty}\sum_{[i]} c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}. \tag{5}$$

Якщо $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормована база в E, то $e_{[i]}^{(k)} := e_{i_1}^{k_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{i_n}^{k_n}$, $k_j \geq 0$, $k_1 + \dots + k_n = n$, $i_1 < \ldots < i_n$, ортогональна база в $\mathcal{F}_\eta$ і $\left\| e_{[i]}^{(k)} \right\| = \left(c_{[i]}^{(k)}\right)^{-2}$.

Теорема 3. *Припустимо, що існує константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел (M_n) така, що*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = M \le \infty$$

і для кожного n

$$0 < c_{[i]}^{(k)} = c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n} \le SM_n^2 \frac{(k_1+\dots+k_n)!}{k_1!\cdots k_n!} = SM_n^2 \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!},$$

де $n = k_1+\dots+k_n$. Тоді існує відкрита підмножина $U \subset E$, $U \ni 0$, така, що

i) *Ряд (5) збігається для кожного $x \in U$ і η є аналітичним відображенням з U в $\mathcal{F}_\eta$.*

ii) *Для кожного $\varphi \in \mathcal{F}_\eta$ відображення $f_\varphi(x) = \langle \eta(x) \mid \varphi \rangle$ є аналітичною функцією на U.*

iii) *Функція $\left\langle \eta(x) \middle| e_{[i]}^{(k)} \right\rangle$ є n-однорідним поліномом і*

$$\left\langle \eta(x) \middle| e_{[i]}^{(k)} \right\rangle = x_{i_1}^{k_1}\cdots x_{i_n}^{k_n}.$$

iv) *Множина $\{\eta(x) : x \in U\}$ є щільною в $\mathcal{F}_\eta$.*

Теорема 4. *Припустимо, що константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел (M_n) є такими, що*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = 0$$

і

$$c_{[i]}^{(k)} \le SM_n^2 \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!},$$

де $c_{[i]}^{(k)} = \left\| e_{[i]}^{(k)} \right\|^{-2}$, $e_{[i]}^{(k)}$ — ортогональна база в $\mathcal{F}_\eta$. Тоді $\mathcal{H}_\eta = \mathcal{F}_\eta^*$ є гільбертовим простором, який складається з цілих функцій обмеженого типу на E.

Цей простір розглядався в роботі Ю.М. Березанського та Ю.Г. Кондратьєва [2], а також досліджувався в роботах А.В. Загороднюка та О.В. Лопушанського [4].

2 Спектральний розклад для нормальних операторів композиції

Нехай E — комплексний гільбертів простір. Розглянемо спектральні властивості нормального оператора композиції $T_F : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$, $T_F(f)(x) = f(F(x))$.

Теорема 5. *Якщо $F : E \to E$ — лінійний нормальний оператор, то оператор T_F є нормальним.*

Доведення. Нехай F — лінійний нормальний оператор. Доведемо, що оператор композиції T_F є нормальним оператором. Візьмемо функцію $f(x) \in D(T_F)$, тоді для деякого елемента

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{u_{n_k} \otimes \dots \otimes u_{n_k}}_{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (x|u_{n_k})^n, \qquad f(F(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (F(x)|u_{n_k})^n.$$

Отже,

$$T_F^* T_F(f(x)) = T_F^*(f(F(x))) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (F(F^*(x))|u_{n_k})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (F^*(F(x))|u_{n_k})^n = T_F T_F^*(f(x)).$$

Тобто оператори F і F^* комутують на спільній області визначення. Таким чином, оператор T_F є нормальним. Теорему доведено. □

Теорема 6. *Нехай F — нормальний (не обов'язково обмежений) лінійний оператор в E з областю визначення $D(F)$, $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \ni \lambda \to \mathcal{E}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ — розклад одиниці цього оператора в E. Тоді T_F, як оператор в просторі $\mathcal{H}_\eta$, допускає зображення*

$$T_F = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n),$$

де $\sigma(F)$ позначає спектр оператора F.

Доведення. Нехай $x = \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)x$, $\mathcal{E}(\lambda)$ — розклад одиниці в E, який відповідає лінійному оператору F, $x \in D(F)$. Тоді для $x_1, \dots x_n \in D(F)$

$$x_1 \otimes_s \dots \otimes_s x_n = \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)x_1 \otimes_s \dots \otimes_s \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)x_n.$$

Нехай

$$w_n = \sum_k \underbrace{\int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k \otimes \dots \otimes \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k}_{n} \quad -$$

елемент з $\otimes_s^n E$, який належить області визначення $\otimes_s^n D(F)$.

Візьмемо

$$f_n(x) = \langle \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_{n} \mid w_n \rangle = \langle x^{(n)} \mid w_n \rangle.$$

Тоді $f_n \in D(T_F)$.

$$f_n(F(x)) = \langle \underbrace{F(x)\otimes\cdots\otimes F(x)}_{n} \mid \sum_k \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k \otimes\cdots\otimes \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k\rangle =$$

$$= \sum_k \Big\langle F(x) \mid \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k \Big\rangle^n = \sum_k \Big\langle \int_{\sigma(F)} \lambda\mathcal{E}(d\lambda)x \mid \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k \Big\rangle^n =$$

$$= \sum_k \Big(\int_{\sigma(F)} \lambda\langle \mathcal{E}(d\lambda)x \mid \int_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda)y_k\rangle \Big)^n =$$

$$= \sum_k \Big(\int_{\sigma(F)} \lambda_1 \langle \mathcal{E}(d\lambda_1)x \mid \mathcal{E}(d\lambda_1)y_k\rangle \Big)\cdots\Big(\int_{\sigma(F)} \lambda_n \langle \mathcal{E}(d\lambda_n)(x) \mid \mathcal{E}(d\lambda_n)y_k\rangle \Big) =$$

$$= \sum_k \int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1\cdots\lambda_n \langle \mathcal{E}(d\lambda_1)(x) \mid \mathcal{E}(d\lambda_1)(y_k)\rangle$$

$$\cdots\langle \mathcal{E}(d\lambda_n)(x) \mid \mathcal{E}(d\lambda_n)(y_k)\rangle = \sum_k \int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1\cdots\lambda_n$$

$$\langle \mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n)x^{(n)} \mid \mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n)y_k^{(n)}\rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_k \int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1\cdots\lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n)(\underbrace{x\otimes\cdots\otimes x}_{n}) \mid w_n \Big\rangle.$$

Отже,

$$T_F(f_n) = \sum_n \Big\langle \int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1\cdots\lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) \mid w_n \Big\rangle.$$

Теорему доведено. □

Нехай δ — деяка борелівська підмножина в $\sigma(T_F)$. Позначимо

$$\overline{\Delta}_n(\delta) = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n \quad | \quad \lambda_1\cdots\lambda_n\in\delta, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\sigma(F)\}.$$

Оскільки функція $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\to\lambda_1\cdots\lambda_n$ є неперервною і множина $\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n \;|\; \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\sigma(F)\}$ є замкненою, то множина $\overline{\Delta}_n(\delta)$ є борелівською в $\mathbb{C}^n$. Тому існує інтеграл

$$\mathcal{E}_n(\delta) := \int_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \cdots \int_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n).$$

Позначимо $\mathfrak{E}(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n(\delta)$, де у випадку $n=0$ ми розглядаємо міру Лебега на $\mathbb{C}$. З властивостей інтеграла випливає, що $\mathfrak{E}(\delta)$ є спектральною мірою, яку будемо позначати $\mathfrak{E}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}$. За побудовою бачимо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma(T_F)} \lambda\mathcal{E}_n(d\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \cdots \int_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \lambda_1\cdots\lambda_n\mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1\cdots\lambda_n\mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n).$$

Тому за теоремою 6

$$T_F = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sigma(T_F)} \lambda\mathcal{E}_n(d\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} \lambda_1\cdots\lambda_n\mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n).$$

Таким чином, ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 7. *Обмежений нормальний оператор T_F однозначно визначає на борелівських множинах комплексної площини регулярну зліченно адитивну самоспряжену спектральну міру $\mathfrak{E}(\lambda)$, яка перетворюється в нуль на $\rho(T_F)$ і володіє тією властивістю, що*

$$g(T_F) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sigma(F)} \cdots \int_{\sigma(F)} g(\lambda_1\cdots\lambda_n)\mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n)$$

для кожної функції g з $C(\sigma(F))$.

Доведення. Якщо приймемо $\mathfrak{E}(\lambda)=0$, коли $\sigma(T_F)$ — порожня множина, то твердження теореми безпосередньо випливає з сформульованого вище і наслідку [3, ст. 21]. Теорему доведено. □

Згідно з теоремою 2 однозначно визначена спектральна міра $\mathfrak{E}(\lambda)$ є розкладом одиниці для оператора T_F.

Наслідок 2.1. *Якщо $F: E\to E$ — нормальний оператор і $\sigma(F)$ — спектр, то спектр оператора $T_F:\mathcal{H}_\eta\to\mathcal{H}_\eta$ має вигляд:*

$$\sigma(T_F) = \{\lambda_1\cdots\lambda_n \quad | \quad \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\sigma(F)\}.$$

Наслідок 2.2. *Нехай $F: E\to E$ — лінійний нормальний оператор. Оператор $T_F:\mathcal{H}_\eta\to\mathcal{H}_\eta$ — неперервний тоді і тільки тоді, коли $\|F\|\le 1$.*

Доведення. Якщо $\|F\|\le 1$, то T_F — нормальний оператор і $\sigma(T_F)$ — обмежена множина. Звідси випливає, що оператор T_F — неперервний.

Якщо $\|F\|>1$, то існує $\lambda\in\sigma(F)$, $|\lambda|>1$. Тому $\lambda^k\to\infty$ при $k\to\infty$. Крім того $\lambda^k\in\sigma(T_F)$ $\forall k$, тоді $\sigma(T_F)$ — необмежена множина, а отже оператор T_F — необмежений. Отримали протиріччя. Наслідок доведено. □

Зауваження 2.1. *Нехай $v(t)$ — деяка функція однієї комплексної змінної, яка неперервна на $\sigma(F)$. В загальному випадку, коли функція $v(t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_kt^k$ — поліном, то легко бачити, що*

$$v(T_F)(f) = \sum_{k=0}^{\infty}v_k(T_F)^k(f) \neq T_{v(F)}(f).$$

Проте, якщо $v(t)=t^n$, то отримаємо

$$v(T_F)(f) = T_F^n(f) = f(\underbrace{F\cdots(F(x))}_{n}) = f(F^n(x)) = T_{F^n}(f) = T_{v(t)}(f).$$

3 Спряжені оператори композиції

Нехай E — комплексний гільбертів простір. Розглянемо умови самоспряженості оператора композиції T_F, $T_F : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$, $T_F(f)(x) = f(F(x))$.

Твердження 3.1. *Нехай T_F — оператор композиції на $\mathcal{H}_\eta$ для деякого аналітичного відображення F. Якщо T_F^* — оператор композиції з аналітичним відображенням G, то F і G — лінійні оператори.*

Доведення. Припустимо, що $T_F^* = T_G$. Нехай $F = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k$, $G = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_k$, де F_k, G_k — однорідні поліноміальні відображення. Припустимо, що g_1 — деякий лінійний функціонал і f_k — довільний k-однорідний поліном. Нехай L_k — k-лінійне симетричне відображення таке, що $f_k(x) = L_k(x, \dots, x)$. Тоді

$$f_k\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\right) = f_k(x_0) + nL_k(G_1(x), x_0 \cdots x_0) + \sum_{m=2}^{\infty} g_m(x),$$

де $x_0 = G_0 = G(0)$, g_m — m-однорідний поліном. Отже, для однорідного полінома f_k будемо мати:

$$\langle T_F(g_1) \mid f_k\rangle = \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle =$$
$$= \langle g_1 \mid f_k(x_0) + nL_k(G_1(x), x_0^{k-1}) + \sum_{m=2}^{\infty} g_m(x)\rangle =$$
$$= \langle g_1 \mid nL_k(G_1(x), x_0^{k-1})\rangle.$$

Візьмемо замість $x \in E$ елемент λx, де $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle g_1(F_k(\lambda x)) \mid f_k\rangle = \lambda^k \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle = \lambda \langle g_1 \mid nL_k(G_1(x), x_0^{k-1})\rangle.$$

Це виконується лише при $k = 1$.

Отже,

$$\langle T_F(g_1) \mid f_k\rangle = \Big\langle g_1\Big(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\Big)\Big| f_k\Big\rangle = \Big\langle \sum_{n=0}^{\infty} g_1(F_n)\Big| f_k\Big\rangle = \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle.$$

З іншого боку

$$\langle g_1 \mid T_G(f_k)\rangle = \Big\langle g_1\Big| f_k\Big(\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\Big)\Big\rangle.$$

Покажемо, що $F_k = 0$ при $k \neq 1$. Справді, при $k \neq 1$

$$0 = \Big\langle g_1\Big(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\Big)\Big| f_k\Big\rangle = \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle$$

для кожного g_1 — лінійного, f_k — k-однорідного полінома. Звідси отримуємо, що $F_k = 0$. Таким чином, F — лінійний оператор. Оскільки $T_G^* = T_F^{**} = T_F$, то G — лінійний. Твердження доведено. □

Теорема 8. *Нехай, тепер $F : E \to E$ — деяке аналітичне відображення. Припустимо, що η задовольняє умови теореми 3 для деякої відкритої кулі $U \in E$ з центром в нулі. Оператор T_F — обмежений і самоспряжений тоді і тільки тоді, коли F — самоспряжений лінійний оператор, $\|F\| \leq 1$. Якщо $\|F\| > 1$, то T_F — самоспряжений необмежений оператор.*

Доведення. Якщо T_F — самоспряжений оператор, то з твердження 3.1 випливає, що F — лінійний. Крім того, $T_F(f_1) = F^*(f_1)$ для кожного лінійного фукціонала f_1. Тому F — самоспряжений.

Нехай $x, z \in E$. Внаслідок самоспряженості відображення F будемо мати:

$$\langle T_F\eta(x) \mid \eta(z)\rangle = \langle \eta(F(x)) \mid \eta(z)\rangle =$$
$$= \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left\langle c_{[i]}^{(k)} F\left(x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \middle| c_{[i]}^{(k)} z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \right\rangle = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left(c_{[i]}^{(k)}\right)^2 \left\langle F\left(x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \middle| z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \right\rangle =$$
$$= \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left(c_{[i]}^{(k)}\right)^2 \left\langle x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \middle| F\left(z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \right\rangle = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left\langle c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \middle| F\left(c_{[i]}^{(k)} z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \right\rangle =$$
$$= \langle \eta(x) \mid \eta(F(z))\rangle = \langle \eta(x) \mid T_F\eta(z)\rangle.$$

Оскільки лінійна оболонка множини $\{\langle \cdot \mid \eta(z)\rangle : z \in U\}$ є щільною в $\mathcal{H}_\eta$, то $\langle T_F(f) \mid g\rangle = \langle f \mid T_F(g)\rangle$ $\forall f, g \in D(T_F)$.

Отже, T_F — симетричний оператор. Тому, за наслідком 2.2, якщо F — лінійний неперервний самоспряжений оператор з E в E, то T_F — самоспряжений і замкнений. Якщо $\|F\| \leq 1$, то T_F — обмежений. Теорему доведено. □

Зауважимо, що якщо F — лінійний унітарний оператор, то T_F також є унітарним оператором. Навпаки, з унітарності T_F випливає, що $T_F^* = (T_F)^{-1} = T_{F^{-1}}$. Тому F — бієктивне аналітичне відображення і F^{-1} — аналітичне. Тоді, за твердженням 3.1, F — лінійний оператор. При цьому $(T_F)^* = T_{F^*}$. Отже, F — унітарний оператор.

Означення 3.1. *φ — внутрішнє аналітичне відображення з одиничної кулі в $\mathbb{C}^2$, якщо для майже всіх $z = (z_1, z_2)$, $|z| = 1$*

$$\lim_{r \to 1^-} |\varphi(rz)| = 1.$$

В статті [9] показано, що для довільного внутрішнього відображення φ на $\mathbb{C}^2$ і невід'ємних цілих N і M відображення композиції T_F, де

$$F(z_1, z_2) = (z_1\varphi^M(z_1, z_2), z_2\varphi^N(z_1, z_2)) \tag{6}$$

є ізометричним оператором на просторі Харді $H^2(B_2)$.

В роботі [6] доведено існування нетривіальної внутрішньої функції $\varphi(z)$ на одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$, яка не є раціональною функцією.

Таким чином, для довільних фіксованих N і M композиція T_F з відображенням F, яке задається формулою (6) є лінійним ізометричний (але не унітарним) оператором на просторі $\mathcal{H}_\eta = H^2(B_2)$, який є композицією з нелінійним аналітичним відображенням.

Література

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Наука, 1966. — 543 с.
2. Березанський Ю. М., Кондратьев Ю. Г. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* — К.: IM AH УРСР, 1978. — 680 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Спектральная теория.* — М.: Мир, 1966. — 1064 с.
4. Загороднюк А. В., Лопушанський О. В. *Класи функцій H_2 в одиничній кулі гільбертового просто-ру*// Доповіді Національної академії наук України. — 2001, № 5. — С. 13–19.
5. Рудин У. *Функциональный анализ.* — М.: Мир, 1975. — 448 с.
6. Aleksandrov A. B., *Existence of inner functions in a ball*, Mat. Sb. Nov. Ser, **118**, № 160 (1982), 147–163.
7. Caughran J. G., *Polynomial approximation and spectral properties of composition operators on H^2*, Indiana Univ. Math. J., **21** (1971), 81–84.
8. Caughran J. G., Schwartz H. J., *Spectra of compact composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1970), 127–130.
9. Cima J. A., Stanton C. S., Wogen W. R., *On boundedness of composition operators on $H^2(B_2)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **91**, № 2 (1984), 217–222.
10. Cowen C. C., *Composition operators on H^2*, J. Operator Th., **9** (1983), 77–106.
11. Kamowitz H., *The spectra of composition operators on H^p*, J. Funct. Anal., **18** (1975), 132–150.
12. MacCluer B. D., Shapiro J. H., *Angular derivatives and compact composition operators on Hardy and Bergman spaces*, Canadian J. Math. **38** (1986), 878–906.
13. Nordgren E. A., *Composition operators* / E. A. Nordgren // Canadian J. Math., **20** (1968), 442–449.
14. Nordgren E. A., *Composition operators on Hilbert spaces*, Hilbert spaces operators. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, **693** (1978), 37–63.
15. Ryff J. V., *Subordinate H^p functions*, Duke Math. J., **33** (1966), 347–354.
16. Schwartz H. J., *Composition operators on H^p*, Ph. D. Thesis, Univ. of Toledo, 1969.
17. Shapiro J. H., *The essential norm of a composition operator*, Annals of Math., **125** (1987), 375–404.

Львівська комерційна академія,
Львів, Україна.

Надійшло 20.04.2009

Mozhyrovska Z.G. *Normal and self-adjoint composition operators on the space of analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 69–78.

We consider spectral properties of normal composition operators and investigate some properties of self-adjoint operators on space of analytic functions on Hilbert space.

Можировская З.Г. *Нормальные и самосопряженные операторы композиции на пространствах аналитических функций // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 69–78.

В статье рассматриваются спектральные свойства нормальных операторов, а также исследуются некоторые свойства самосопряженных операторов композиции на пространствах аналитических функций на гильбертовом пространстве.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1 | Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 519.217.4

Осипчук М.М.

ІСНУВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Осипчук М.М. *Існування дифузійних процесів із заданими локальними характеристиками // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 79–84.

У роботі наведені результати, що стосуються існування узагальнених дифузійних процесів в сепарабельному гільбертовому просторі із заданими локальними характеристиками – вектором переносу і оператором дифузії. Розглянуто деякі властивості таких процесів (еквівалентність мір, зв'язок із стохастичними диференціальними рівняннями).

Нехай $P(t,x,\Gamma)$ ($t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$) — ймовірність переходу однорідного марківського процесу в $\mathbb{R}^m$. Такий процес називається дифузійним, якщо виконуються наступні умови [1]:

1. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,dy) = 0$ при всіх $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$;
2. Існує така функція $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, що
$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x,\theta)P(t,x,dy) = (a(x),\theta)$$
при всіх $x, \theta \in \mathbb{R}^m$;
3. Існує така функція $b : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$, що
$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x,\theta)^2 P(t,x,dy) = (b(x)\theta,\theta)$$
при всіх $x, \theta \in \mathbb{R}^m$.

При цьому функцію $a(x)$ прийнято називати вектором переносу, а функцію $b(x)$ — матрицею (оператором) дифузії, а їх сукупність — локальними характеристиками дифузійного процесу.

Питання полягає в існуванні для заданих $a(x)$ і $b(x)$ такого дифузійного процесу, щоб ці функції були його вектором переносу та матрицею дифузії відповідно.

Класичним результатом, що дає відповідь на це питання, є така теорема.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 60H10.

Теорема 1. *Якщо існують константи $K > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < C_1 \le C_2$, для яких при всіх $x, y, \theta \in \mathbb{R}^m$ та $i, j = 1, 2, \ldots, m$:*

1. $|b_{ij}(x) - b_{ij}(y)| \le K|x - y|^\alpha$;
2. $C_1\theta^2 \le (b(x)\theta, \theta) \le C_2\theta^2$;
3. $|a_i(x) - a_i(y)| \le K|x - y|^\alpha$, $|a_i(x)| \le C_2$,

то існує однорідний дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та оператором дифузії, що задається матрицею $b(x)$.

Серед властивостей цього процесу слід відмітити те, що його ймовірність переходу має щільність $g(t, x, y)$, яка є фундаментальним розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

На шляху послаблення умов на локальні характеристики дифузійних процесів (в основному вектора переносу) лежить результат М.І.Портенка [2].

Теорема 2. *Якщо функція $b(x)$ така ж, як і в теоремі 1, а функція $a(x)$ така, що при деякому $p > m$*

$$\|a\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |a(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{1}$$

то існує (узагальнений) дифузійний процес з локальними характеристиками $a(x)$ і $b(x)$.

Зауваження 1. *Дифузійний процес, існування якого стверджується в теоремі 2, є узагальненим в тому розумінні, що границі з означення дифузійного процесу існують в узагальненому розумінні, тобто для кожної неперервної фінітної функції $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ мають місце рівності:*

1. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\frac{1}{t}\int_{|y-x|>\varepsilon} P(t, x, dy)dx = 0$;
2. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\frac{1}{t}\int_{|y-x|\le\varepsilon} (y - x, \theta)P(t, x, dy)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(a(x), \theta)dx$;
3. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\frac{1}{t}\int_{|y-x|\le\varepsilon} (y - x, \theta)^2 P(t, x, dy)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(b(x)\theta, \theta)dx$.

Приклад 1. *Для функції $a(x)$ з компактним носієм та степеневою особливістю в початку координат*

$$a(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|^{\alpha+1}}, & \text{при } |x| \le C; \\ 0, & \text{при } |x| > C \end{cases}$$

умова теореми 2 виконується при $\alpha < 1$.

Зауваження 2. *Вектор переносу, який задовольняє умову теореми 2, може мати тільки такі особливості, що дифузійний процес "не помічає" їх. Його траєкторії такі ж, як траєкторії процесу без переносу. Міри, породжені перехідними ймовірностями цих процесів, є еквівалентними:*

$$P_x^a \sim P_x^0.$$

Тут P_x^a і P_x^0 задані на σ-алгебрах підмножин $\Omega = C([0; +\infty))$, що породжуються множинами виду $C_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) = \{x(t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(t_n) \in \Gamma_n\}$, $t_i \in [0; +\infty)$, $t_{i+1} > t_i$, $\Gamma_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_x^0(C_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)) =$$
$$= \int_{\Gamma_1} P_0(t_1, x, dy_1)\int_{\Gamma_2} P_0(t_2 - t_1, y_1, dy_2)\ldots\int_{\Gamma_n} P_0(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)$$
$$P_x(C_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)) =$$
$$= \int_{\Gamma_1} P(t - 1, x, dy_1)\int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2)\ldots\int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)$$

де $P_0(t, x, \Gamma)$ — ймовірність переходу дифузійного процесу з нульовим переносом та матрицею дифузії $b(x)$.

Слабші вимоги на вектор переносу, при яких існує узагальнений дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та матрицею дифузії $b(x)$, розглянуто в [4].

Теорема 3. *Якщо існують константи $K > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < C_1 \le C_2$, $\delta > 0$, $\gamma > -\frac{\delta+1}{2} + \frac{m}{2}$ для яких при всіх $x, y, \theta \in \mathbb{R}^m$ та $i, j = 1, 2, \ldots, m$:*

1. $|b_{ij}(x) - b_{ij}(y)| \le K|x - y|^\alpha$;
2. $C_1\theta^2 \le (b(x)\theta, \theta) \le C_2\theta^2$;
3. $\int_{\mathbb{R}^m} |a(y)|^{1+\delta} \exp\left\{-\frac{(y - x)^2}{t}\right\} dy \le Kt^\gamma$,

то існує однорідний узагальнений дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та матрицею дифузії $b(x)$.

Доведення. Зауважимо, що умови 1 і 2 гарантують існування дифузійного процесу з нульовим переносом та матрицею дифузії $b(x)$ (див. теорему 1).

Випадковий процес, про існування якого стверджується в теоремі, задається визначеною на множині обмежених вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, напівгрупою операторів

$$T_t\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)g(t, x, y)dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} V(t - \tau, y, \varphi)|a(y)|g(\tau, x, y)dy,$$

де $g(t, x, y)$ — щільність ймовірності переходу дифузійного процесу з нульовим переносом та матрицею дифузії $b(x)$, $V(t, x, \varphi)$ — розв'язок рівняння

$$V(t, x, \varphi) = V_0(t, x, \varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} V(t - \tau, y, \varphi)|a(y)|(\nabla_x g(\tau, x, y), e(x))dy \tag{2}$$

з $V_0(t,x,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)(\nabla_x g(t,x,y), e(x))dy$ та $e(x) = \dfrac{a(x)}{|a(x)|}$ при $|a(x)| > 0$.

Умови теореми гарантують існування та єдиність розв'язку рівняння (2) в класі функцій, які задовольняють нерівність $|V(t,x,\varphi)| \le Ct^{-\frac{1}{2}}$. Цей розв'язок можна одержати методом послідовних наближень.

Ймовірність переходу одержаного однорідного марківського процесу задається рівністю $P(t,x,\Gamma) = T_t \mathbb{I}_\Gamma(x)$ $(t>0,\ x\in\mathbb{R}^m,\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. □

Зауваження 3. *Всі функції $a(x)$, для яких виконується умова (1), задовольняють відповідну умову теореми 3. Крім того можна навести приклади, які свідчать про те, що клас векторів переносу з теореми 3 є ширшим:*

$$a(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|\cdot|x|_n^\alpha}, & \text{при } |x| \le C; \\ 0, & \text{при } |x| > C. \end{cases}$$

Тут $\dfrac{n}{m} \le \alpha < 1$, $n < m$, $|x|_n = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Зауваження 4. *При виконанні умов теореми 3 випадковий процес, про існування якого стверджується в теоремі, є слабким розв'язком стохастичного диференціального рівняння*

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + b^{\frac{1}{2}}(\xi(t))dw(t),$$

що дає змогу моделювати траєкторії такого процесу.

Зауваження 5. *Особливості вектора переносу вже не завжди дозволяють процесу не помічати їх. Для еквівалентності мір, породжених одержаним процесом та процесом з нульовим переносом і тією ж дифузією, приходиться вимагати $\delta > 1$ в умові 3 теореми 3. Прикладом такого переносу є функція з обмеженим носієм $a(x) = \dfrac{\tilde{a}}{|x|_1^\alpha}$ при $|x| \le C$, $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$, $\tilde{a} \in \mathbb{R}^m$.*

Вид наведеної в теоремі 3 умови на вектор переносу дозволяє перенести застосований метод побудови дифузійного процесу на випадок нескінченновимірного простору [3].

Нехай X — сепарабельний гільбертів простір, $\mathcal{B}(X)$ — борелівська σ-алгебра підмножин X, $\mathbf{B}$ — додатний ядерний оператор і $\|\mathbf{B}\| < 1$. Позначимо через $P_0(t,x,\cdot)$ гаусівську міру на $\mathcal{B}(X)$ з середнім $x \in X$ та кореляційним оператором $t\mathbf{B}$.

Теорема 4. *Нехай функція $a : X \to X$ задовольняє умови:*

1. *Для майже всіх $x \in X$ за всіма мірами $P_0(t,y,\cdot)$ $(t>0,\ y\in X)$ (далі P_0 - м.в.)*
$$a(x) \in \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} X;$$
2. *Існують такі сталі $K>0$, $\delta>0$, $\gamma > -\frac{\delta+1}{2}$, що при $t>0$, P_0 - м.в. $x\in X$*
$$\int_X \left|\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} a(y)\right|^{1+\delta} P_0(t,x,dy) \le Kt^\gamma.$$

Тоді існує неперервний однорідний марківський процес зі значеннями в X, що є узагальненим дифузійним процесом з вектором переносу $a(x)$ та оператором дифузії $b(x) = \mathbf{B}$.

Зауваження 6. *Під узагальненим дифузійним процесом з вектором переносу $a(x)$ та оператором дифузії $b(x)$ в гільбертовому просторі розуміємо такий неперервний марківський процес з ймовірністю переходу $P(t,x,\Gamma)$, для якого існують границі:*

1. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int\limits_X \varphi(x)\dfrac{1}{t}\int\limits_X (y-x,\theta)P(t,x,dy)\mu(dx) = \int\limits_X \varphi(x)(a(x),\theta)\mu(dx);$
2. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int\limits_X \varphi(x)\dfrac{1}{t}\int\limits_X (y-x,\theta)^2 P(t,x,dy)\mu(dx) = \int\limits_X \varphi(x)(b(x)\theta,\theta)\mu(dx),$

для кожної неперервної обмеженої функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ та деякої гаусової міри μ на $\mathcal{B}(X)$.

Зауваження 7. *Побудований в теоремі 4 випадковий процес є слабким роз'язком стохастичного диференціального рівняння*

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + dw_B(t),$$

де $w_B(t)$ — так званий $\mathbf{B}$-вінерівський процес, тобто випадковий процес з незалежними приростами, для якого різниці $w_B(t) - w_B(s)$ мають гаусівський розподіл із нульовим середнім та кореляційним оператором $(t-s)\mathbf{B}$.

Література

1. Гихман И.И., Скороход А.В. *Теория случайных процессов.* Т.2. — М.: Наука, 1973. — 640 с.
2. Портенко Н.И. *Обобщенные диффузионные процессы.* — К.:Наук. думка, 1982. — 208 с.
3. Осипчук М.М. *Дифузія з нерегулярним переносом в гільбертовому просторі.* // Укр. матем. журнал. — 1995. — Т.47, №9. — С. 1224–1230.
4. Осипчук М.М. *Дифузія з нерегулярним переносом* // Теорія ймовірн. та мат. стат. — 1996. — Т.54. — С. 122–128.

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 23.02.2009

Osypchuk M.M. *Existence of diffusive processes with the given local characteristics*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 79–84.

The results which concern to existence of diffusive processes with the given local characteristics (vector of drift, operator of diffusion) are considered in the article. The processes are examined in separable Hilbert space. Some properties of such processes (equivalence of measures, connection with stochastic differential equations) are also considered.

Осипчук М.М. *Существование диффузионных процессов с заданными локальными характеристиками* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 79–84.

В работе приведены результаты, касающиеся существования обобщенных диффузионных процессов в сепарабельном гильбертовом пространстве с заданными локальными характеристиками – вектором переноса и оператором диффузии. Рассмотрены некоторые свойства таких процессов (эквивалентность мер, связь с стохастическими дифференциальными уравнениями).

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 512.538

Семенчук А.В.

ПАРАДЕТЕРМІНАНТИ ТА ФОРМАЛЬНІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ РЯДИ

Семенчук А.В. *Парадетермінанти і формальні експоненціальні ряди* // *Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 85–91.

При допомозі парадетермінантів трикутних матриць досліджуються формальні експоненціальні та логарифмічні ряди.

Вступ

Центральним методом комбінаторного аналізу є метод генератрис [1], [3], який базується на формальних операціях з формальними степеневими рядами. Сьогодні відомі ефективні рекурсивні алгоритми таких операцій (див. [2], стор. 569–582), проте вони не дозволяють знайти явного вигляду загальних членів їх результатів. Застосування апарату парадетермінантів трикутних матриць до дослідження формальних операцій з рядами [4] дозволяє заповнити вказану прогалину.

В багатьох випадках розв'язання задач переліку в комбінаторному аналізі істотно спрощується, якщо в ролі генератриси використовуються експоненціальні чи логарифмічні формальні степеневі ряди.

Метою цієї статті є застосування апарату парадетермінантів та параперманентів трикутних матриць до дослідження операцій з формальними експоненціальними та логарифмічними степеневими рядами.

1 Операції з експоненціальними формальними степеневими рядами

Нехай $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$ – відповідні позначення формальних факторіальних степеневих рядів:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i!}, \ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{z^i}{i!}, \ \sum_{i=0}^{\infty} x_i \frac{z^i}{i!}, \ a_0 = b_0 = x_0 = 1.$$

Тоді справедливе наступне твердження:

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.

Твердження 1.1. *Якщо*
$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \tag{1}$$
то
$$x_i = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot\left\langle\frac{(j-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j},\quad i=1,2,\ldots. \tag{2}$$
Тут і нижче ми вважаємо, що
$$\left\langle\frac{(0-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant 0}=1,\ i=1,2,\ldots.$$

Доведення. Із рівності (1) випливає справедливість системи рівнянь
$$a_i=\binom{i}{0}b_i+\binom{i}{1}x_1b_{i-1}+\ldots+\binom{i}{i-1}x_{i-1}b_1+\binom{i}{i}x_i,\ i=1,2,\ldots$$
Доведемо, що розв'язком цієї системи рівнянь є x_i, що задається рівністю (2).

Очевидно, що при $i=1$ твердження – істинне. Доведемо його істинність при $i=m+1$, якщо при $i=1,2,\ldots,m$ воно – істинне. Нехай
$$\left\langle\frac{(j-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j}=B_j,$$
тоді
$$\begin{gathered}x_{m+1}=a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\binom{i}{m+1}b_{m-i+1}\cdot x_i=\\ a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\binom{i}{m+1}b_{m-i+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot B_j=\\ a_{m+1}-b_{m+1}-(a_m-b_m)b_1B_0\binom{m}{0}\binom{m+1}{m}+\\ (a_{m-1}-b_{m-1})(b_1B_1\binom{m}{1}\binom{m+1}{m}-b_2B_0\binom{m-1}{0}\binom{m+1}{m-1})-\ldots+\\ (-1)^m(a_1-b_1)(b_1B_{m-1}\binom{m}{m-1}\binom{m+1}{m}-\\ b_2B_{m-2}\binom{m-1}{m-2}\binom{m+1}{m-1}+\ldots+(-1)^{m-1}b_mB_0\binom{1}{0}\binom{m+1}{1}=\\ (a_{m+1}-b_{m+1})B_0-\binom{m+1}{0}(a_m-b_m)B_1+\ldots+(-1)^m\binom{m+1}{m}(a_1-b_1)B_m=\\ \textstyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j}(a_{m-j+1}-b_{m-j+1})B_j.\end{gathered}$$
□

Твердження 1.2. *Якщо* $X(z)=\frac{1}{A(z)}$, *то*
$$x_i=(-1)^i\left\langle\frac{(i-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\ i=1,2,\ldots. \tag{3}$$
Доведення. З рівності $X(z)=\frac{1}{A(z)}$ випливає система рівнянь
$$\binom{i}{0}a_i+\binom{i}{1}a_{i-1}x_1+\ldots+\binom{i}{i-1}a_1x_{i-1}+\binom{i}{i}x_i=0,\ i=1,2,\ldots.$$

Розв'язком цієї системи є x_i з рівності (3). Покажемо це. При $i=1$ твердження, очевидно, істинне. Доведемо його істинність при $i=m+1$, якщо при $i=1,2,\ldots,m$ воно – істинне.

Нехай
$$\left\langle\frac{(i-r+1)}{(s-r+1)}\cdot\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}=A_i,$$
тоді
$$\begin{gathered}x_{m+1}=-a_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i}a_{m-i+1}\cdot x_i=\\ -a_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i}a_{m-i+1}(-1)^iA_i=\\ -a_{m+1}-\binom{m+1}{1}a_mA_1-\binom{m+1}{2}a_{m-1}A_2+\ldots-(-1)^m\binom{m+1}{m}a_1A_{m+1}=\\ (-1)^{m+1}A_{m+1}.\end{gathered}$$
□

Таким чином, справедлива тотожність
$$\frac{1}{A(z)}=1-\langle a_1\rangle\cdot\frac{z^1}{1!}+\left\langle\begin{matrix}2a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1\end{matrix}\right\rangle\cdot\frac{z^2}{2!}-\ldots+(-1)^i\left\langle\begin{matrix}ia_1 & & & \\ \frac{ia_2}{a_1} & (i-1)a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1\end{matrix}\right\rangle\cdot\frac{z^i}{i!}+\ldots.$$

Теорема 1. *Якщо* $X(z)=(A(z))^p$, *тут*
$$A(z)=1+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\frac{z^i}{i!},$$
а p – деяке дійсне число, то
$$\begin{gathered}x_n=(-1)^n\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p-j}\cdot\frac{(n-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\\ \left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p-j}\cdot\frac{(n-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\end{gathered} \tag{4}$$
Доведення. Рівність парадетермінанта і параперманента в рівностях (4) доводиться винесенням із кожного стовпця парадетермінанта за його межі спільного множника (-1) і застосуванням теореми про зв'язок параперманента і парадетермінанта. Розкладемо параперманент із рівності (4) при $n=k+1$ за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо рівність (4) при $n=k$. □

Наслідок 1.1. *Справедливі наступні комбінаторні тотожності:*
$$\begin{gathered}(A(z))^n=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!}=\\ 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!},\end{gathered}$$

$$(A(z))^{-n}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n+j}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n+j}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!},$$

$$(A(z))^{\frac{1}{n}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\langle\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!},$$

$$(A(z))^{-\frac{1}{n}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\langle\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(k-j+1)}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k!},$$

в яких n – натуральне число.

Доведення. Для доведення цих тотожностей достатньо в рівності (4) замінити p відповідно на вирази: n, $-n$, $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}$. □

2 Операції з логарифмічними формальними степеневими рядами

Розглянемо деякі операції з формальними логарифмічними степеневими рядами. Нехай $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$ – відповідні позначення формальних степеневих рядів:

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i\frac{z^i}{i},\ \sum_{i=0}^{\infty}b_i\frac{z^i}{i},\ \sum_{i=0}^{\infty}x_i\frac{z^i}{i},\ a_0=b_0=x_0=1.$$

Тоді справедливе наступне твердження:

Твердження 2.1. *Якщо*

$$X(z)=\frac{A(z)}{B(z)},\tag{5}$$

то

$$x_i=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\cdot\frac{i}{(i-j)}\cdot(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot\left\langle\frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j},\ i=1,2,\ldots.\tag{6}$$

Тут, як і в випадку експоненціальних рядів, ми вважаємо, що

$$\left\langle\frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant 0}=1,\ i=1,2,\ldots.$$

Доведення. Із рівності (5) випливає справедливість системи рівнянь

$$a_i=b_i+\frac{i}{1(i-1)}\cdot x_1b_{i-1}+\ldots+\frac{i}{(i-1)1}\cdot x_{i-1}b_1+x_i,\ i=1,2,\ldots$$

Доведемо, що розв'язком цієї системи рівнянь є x_i, що задається рівністю (6).

Очевидно, що при $i=1$ твердження – істинне. Доведемо його істинність при $i=m+1$, якщо при $i=1,2,\ldots,m$ воно – істинне. Нехай

$$\left\langle\frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)}\cdot\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j}=B_j,$$

тоді

$$\begin{gathered}x_{m+1}=a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\frac{m+1}{i\cdot(m-i+1)}\cdot b_{m-i+1}\cdot x_i=\\ a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\frac{m+1}{i\cdot(m-i+1)}\cdot b_{m-i+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\cdot\frac{i}{(i-j)}\cdot(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot B_j=\\ a_{m+1}-b_{m+1}-(a_m-b_m)b_1B_0\cdot\frac{m}{m}\cdot\frac{m+1}{m}+\\ (a_{m-1}-b_{m-1})(b_1B_1\cdot\frac{m}{m-1}\cdot\frac{m+1}{m}-b_2B_0\cdot\frac{m-1}{m-1}\cdot\frac{m+1}{(m-1)\cdot 2})-\ldots+\\ (-1)^m(a_1-b_1)(b_1B_{m-1}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{m}-\\ b_2B_{m-2}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m+1}{(m-1)\cdot 2}+\ldots+(-1)^{m-1}b_mB_0\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{m+1}{m})=\\ (a_{m+1}-b_{m+1})B_0-\frac{m+1}{1}\cdot(a_m-b_m)B_1+\ldots+(-1)^m\cdot\frac{m+1}{m}\cdot(a_1-b_1)B_m=\\ \textstyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\cdot\frac{m+1}{(m-j+1)}\cdot(a_{m-j+1}-b_{m-j+1})B_j.\end{gathered}$$

□

Твердження 2.2. *Якщо $X(z)=\frac{1}{A(z)}$, то*

$$x_i=(-1)^i\cdot i\cdot\left\langle\frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)}\cdot\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\ i=1,2,\ldots.\tag{7}$$

Доведення. З рівності $X(z)=\frac{1}{A(z)}$ випливає система рівнянь

$$a_i+\frac{i}{1(i-1)}\cdot a_{i-1}x_1+\ldots+\frac{i}{(i-1)1}\cdot a_1x_{i-1}+x_i=0,\ i=1,2,\ldots.$$

Розв'язком цієї системи є x_i з рівності (7). Покажемо це. При $i=1$ твердження, очевидно, істинне. Доведемо його істинність при $i=m+1$, якщо при $i=1,2,\ldots,m$ воно – істинне.

Нехай

$$\left\langle\frac{(s-r+\delta_{sr})}{(s-r+1)}\cdot\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}=A_i,$$

тоді

$$\begin{gathered}x_{m+1}=-a_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\frac{m+1}{m-i+1}\cdot a_{m-i+1}\cdot x_i=\\ -a_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m}\frac{m+1}{m-i+1}\cdot a_{m-i+1}\cdot(-1)^i\cdot i\cdot A_i=\\ -a_{m+1}+\frac{m+1}{m}\cdot a_mA_1-\frac{m+1}{m-1}\cdot a_{m-1}\cdot 2\cdot A_2+\ldots-(-1)^m\cdot\frac{m+1}{1}\cdot a_1\cdot m\cdot A_{m+1}=\\ (-1)^{m+1}\cdot(m+1)\cdot A_{m+1}.\end{gathered}$$

□

Таким чином, справедлива тотожність

$$\frac{1}{A(z)} = 1-\langle a_1\rangle\cdot\frac{z^1}{1}+2\cdot\left\langle\begin{matrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{2a_1} & a_1 \end{matrix}\right\rangle\cdot\frac{z^2}{2}-\ldots+(-1)^i\cdot i\cdot\left\langle\begin{matrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{2a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{(i-1)a_i}{ia_{i-1}} & \frac{(i-2)a_{i-1}}{(i-1)a_{i-2}} & \dots & a_1 \end{matrix}\right\rangle_i\cdot\frac{z^i}{i}+\ldots.$$

Теорема 2. *Якщо* $X(z) = (A(z))^p$, *тут*

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i},$$

а p *– деяке дійсне число, то*

$$x_n = (-1)^n \cdot n \cdot \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p - j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \tag{8}$$

$$n\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p - j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Доведення. Рівність парадетермінанта і параперманента в рівностях (8) доводиться винесенням із кожного стовпця парадетермінанта за його межі спільного множника (-1) і застосуванням теореми про зв'язок параперманента і парадетермінанта. Розкладемо параперманент із рівності (8) при $n = k+1$ за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо рівність (8) при $n = k$. □

Наслідок 2.1. *Справедливі наступні комбінаторні тотожності:*

$$(A(z))^n = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n - j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k} =$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n - j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

$$(A(z))^{-n} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n + j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k} =$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n + j}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

$$(A(z))^{\frac{1}{n}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k} =$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

$$(A(z))^{-\frac{1}{n}} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\left\langle\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k} =$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\cdot k\cdot\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\cdot\frac{(i-j+\delta_{ij})}{(i-j+1)}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

в яких n *– натуральне число.*

Доведення. Для доведення цих тотожностей достатньо в рівності (8) замінити p відповідно на вирази: n, $-n$, $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}$. □

Література

1. Айгнер М. *Комбинаторная теория.* — М.: Мир. — 1982. — 558 с.
2. Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ, т.2: Получисельные алгоритмы.* — М.: Мир. — 1978.
3. Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика* — М.: Мир. — 1990. — 440 с.
4. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications* // Algebra and Diskrete Mathematics. **1** (2007), 109–138.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 12.11.2008

Semenchuk A.V. *Paradeterminants and formal exponential series*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 85–91.

Formal exponential and logarithmic series using triangular matrices are investigated.

Семенчук А.В. *Парадетерминанты и формальные экспоненциальные ряды // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 85–91.

При помощи парадетерминантов треугольных матриц исследуются формальные экспоненциальные и логарифмические ряды.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.98+517.982.4

Соломко А.В.

ОКРЕМИЙ ВИПАДОК ОПЕРАТОРНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ З НОСІЯМИ В КОНУСІ

Соломко А.В. *Окремий випадок операторного числення для узагальнених функцій з носіями в конусі // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 92–99.

В цій роботі узагальнюється побудова функціонального числення для сильно неперервних напівгруп операторів в алгебрі розподілів Шварца на довільний конус. Досліджується окремий випадок векторнозначного числення на основі модифікації операторного перетворення Фур'є.

1 Термінологія, основні позначення та додаткові твердження

В статті [2] побудовано функціональне числення від генераторів n-параметричних (C_o)-напівгруп операторів в алгебрі узагальнених функцій з носіями в додатному n-вимірному куті. В цій роботі узагальнюється функціональне числення на довільний конус і розглядається окремий випадок векторнозначного операторного числення на основі модифікації формули операторного перетворення Фур'є.

Введемо допоміжні позначення та твердження, які використовуються в даній статті. Розглянемо класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$. Як звичайно, $D(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційованих функцій $\varphi(t)$ з компактними носіями $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n$, $D'(\mathbb{R}^n)$ – спряжений до $D(\mathbb{R}^n)$ простір лінійних неперервних функціоналів, введений Л. Шварцом в [8, 9]. Позначимо через Γ – довільний замкнений гострий тілесний конус. Всюди далі D'_Γ – підпростір в $D'(\mathbb{R}^n)$ тих розподілів f, носії яких $\operatorname{supp} f$ містяться в Γ. Поляра підпростору D'_Γ відносно класичної двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$ має вигляд

$$(D'_\Gamma)^o = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma\}.$$

Білінійна форма $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \ni (f, \varphi_\Gamma) \to \langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \varphi_\Gamma$, індукована двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$, ставить простори D'_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ у двоїстість, де через $\varphi_\Gamma \in D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ позначаємо клас еквівалентності з представником $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Якщо відповідно $\lambda_\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Gamma, \\ 0, & t \notin \Gamma, \end{cases}$ $\varrho : \varphi \to \varphi_\Gamma := \lambda_\Gamma \cdot \varphi$ є характеристичною функцією

2000 *Mathematics Subject Classification:* 42A38, 46H30.

конуса Γ і оператором множення на неї, то фактор-відображення $D(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ реалізується формулою:

$$\varrho : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \to \varphi_\Gamma \in D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$$

і обернене відображення $\varrho^{-1} : D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \ni \varphi_\Gamma \to \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ є багатозначним лінійним відображенням.

Визначимо множину Γ_ν як перетин довільного конуса Γ із замкненою кулею радіуса ν і поставимо у відповідність кожній множині Γ_ν простір функцій

$$D_{\Gamma_\nu} = \{\psi(\tau) = \lambda_\Gamma(t)\varphi(t), \varphi(t) \in D(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \cap \Gamma \subset \Gamma_\nu\}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Gamma_\nu$ для кожної функції $\psi \in D_{\Gamma_\nu}$. Топологію в D_{Γ_ν} задаємо за допомогою норм

$$\|\psi\|_{\nu,m} = \sum_{|k|\le m} \frac{1}{k!} \sup_{\tau\in\Gamma_\nu} |\partial^k \psi(\tau)|,$$

де $\partial^k = \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}$, $\partial_j^{k_j} = \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. При $\nu < \mu$ вкладення $D_{\Gamma_\nu} \subset D_{\Gamma_\mu}$ є неперервними, тому можна визначити індуктивну границю

$$D_\Gamma = \bigcup_\nu D_{\Gamma_\nu} = \liminf_{\nu\to\infty} D_{\Gamma_\nu}.$$

В статті [1] доведено, що простори D_Γ і $D(\mathbb{R})/(D'_\Gamma)^o$ є топологічно ізоморфними.

Надалі будемо розглядати дуальну пару $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$, де D_Γ – простір функцій, означений вище. В статті [1] доведено, що простір D_Γ є монтелевим, борнологічним (LF)-простором. Ядерність просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$ доведено в роботі [4]. Відомо також (див. [4]), що простір D'_Γ є алгеброю відносно операції згортки.

Перетворення Фур'є простору $D(\mathbb{R}^n)$ визначаємо за формулою

$$\mathcal{F} : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \to \widehat{\varphi}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-i\langle t,\xi\rangle} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Фур'є-образ простору $D(\mathbb{R}^n)$ позначаємо через $\widehat{D}(\mathbb{R}^n) = \{\widehat{\varphi} : \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$.

Визначимо фактор-відображення

$$\widehat{\varrho} : \widehat{D}(\mathbb{R}^n) \ni \widehat{\varphi} \to \widehat{\varphi}_\Gamma, \quad \widehat{D}_\Gamma := \widehat{D}(\mathbb{R}^n)/\widehat{\operatorname{Ker}\varrho},$$

де $\widehat{\operatorname{Ker}\varrho} := \mathcal{F}((D'_\Gamma)^o)$. В [3] доведено, що оператор $F = \widehat{\varrho} \circ \mathcal{F} \circ \varrho^{-1}$ є лінійним і неперервним з простору D_Γ на простір $\widehat{D}_\Gamma$. Зауважимо, що на Фур'є-образ $\widehat{D}_\Gamma$ переносяться основні топологічні властивості простору D_Γ, тобто $\widehat{D}_\Gamma$ – бочковий, монтелевий і борнологічний (LF)-простір. Обернене перетворення Фур'є на просторі $\widehat{D}_\Gamma$ існує і зображається у вигляді $F^{-1} \circ \widehat{\varrho} = \varrho \circ \mathcal{F}^{-1}$, де $\mathcal{F}^{-1} : \widehat{D}(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n)$ – обернене відображення до $\mathcal{F}$.

Спряжене до оберненого перетворення Фур'є

$$F^* := (2\pi)^n (F^{-1})' : D'_\Gamma \ni f \to \widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma, \tag{1}$$

де через $\widehat{D}'_\Gamma$ позначено його образ з відповідною індукованою топологією простору D'_Γ, визначаємо співвідношенням

$$\langle \widehat{f}(\xi),\, \widehat{\varphi}_\Gamma(\xi)\rangle = (2\pi)^n \langle f(s),\, \varphi_\Gamma(s)\rangle, \varphi_\Gamma \in D_\Gamma,\ s \in \Gamma,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Зазначимо, що формула (2) разом із відображенням (1) визначає нову дуальну пару $\langle \widehat{D}'_\Gamma,\, \widehat{D}_\Gamma\rangle$, крім того простір $\widehat{D}'_\Gamma$ є алгеброю відносно звичайної поточкової операції множення (див. [3]).

2 Побудова операторного числення

Розглядаємо комплексний банаховий простір $\{\mathcal{Y}, \|\cdot\|\}$ і простір $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ – фінітних нескінченно диференційованих $\mathcal{Y}$-значних функцій $x(t)$ з носіями в конусі Γ з топологією, що визначається набором норм

$$\|x\|_m = \sum_{|k|\le m} \frac{1}{k!} \sup_{t\in\Gamma} \|\partial^k x(t)\|.$$

З ядерності простору D_Γ та відомої теореми Гротендіка [7] про представлення тензорного добутку двох повних просторів, один з яких є ядерним, буде випливати топологічний ізоморфізм просторів $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ та $\mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_\Gamma$, де $\widetilde{\otimes}$ – поповнення тензорного добутку просторів в проективній топології.

Теорема 1. *Для довільного елемента $x = x(t) \in D_\Gamma(\mathcal{Y})$, $t \in \Gamma$, знайдеться число $\nu > 0$ таке, що $x(t) \in \mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ і $x(t)$ можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду в просторі $\mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ вигляду*

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes (\varphi_m)_\Gamma(t),$$

де $\sum\limits_m |\lambda_m| < \infty$ і послідовності $\{(\varphi_m)_\Gamma\}$ та $\{x_m\}$ прямують до нуля у просторах D_{Γ_ν} та $\mathcal{Y}$ відповідно.

Крім того, справедливою є рівність

$$\partial^k x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes \partial^k (\varphi_m)_\Gamma(t), \forall k \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Доведення. З представлення простору $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ випливає, що для кожного $x \in D_\Gamma(\mathcal{Y})$ існує таке число $\nu > 0$, що $x \in \mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$. Очевидно, що простори $\mathcal{Y}$ та D_{Γ_ν} є метризовними, тому для довільного елемента $x \in \mathcal{Y}\widetilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ можна застосувати теорему [6, гл. III, т. 6.4] про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів, що забезпечує нам розклад $x(t)$ в ряд.

Виконання рівності $\partial^k x(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes \partial^k (\varphi_m)_\Gamma(t)$ слідує із абсолютної збіжності ряду. □

Нехай $I_\mathcal{Y}$ – одиничний оператор, що діє в банаховому просторі $\mathcal{Y}$. Визначимо операцію крос-кореляції розподілу $f \in D'_\Gamma$ із основною функцією $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ за формулою

$$M_f \varphi_\Gamma(t) = \lambda_\Gamma \langle f(s),\, \varphi(t+s)\rangle = \lambda_\Gamma \langle f(s),\, \mathcal{T}_s \varphi(t)\rangle = \langle f(s),\, T_s \varphi_\Gamma(t)\rangle,$$

де $t \in \mathbb{R}^n$, $s \in \Gamma$, $T_s \circ \varrho = \varrho \circ \mathcal{T}_s$. В [1] доведено, що відображення $D'_\Gamma \ni f \to M_f \in L(D_\Gamma)$, де $L(D_\Gamma)$ – алгебра лінійних неперервних відображень над простором D_Γ з топологією рівномірної збіжності на компактах, здійснює топологічний ізоморфізм згорткової алгебри D'_Γ на комутант напівгрупи операторів $\{T_s\}_{s\in\Gamma}$ в алгебрі $L(D_\Gamma)$.

Оператор $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ належить простору лінійних неперервних відображень із $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ і діє за формулою:

$$(I_\mathcal{Y} \otimes M_f)x(t) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t), & t \in \Gamma, \\ 0, & t \notin \Gamma. \end{cases}$$

Нехай $U_s : \Gamma \ni s \to U_s \in L(\mathcal{Y})$ – n-параметрична напівгрупа класу (C_0) над $\mathcal{Y}$. Генератори цієї n-параметричної (C_0)-напівгрупи визначаються наступним чином:

$$\partial_j U_s x|_{s=0} = -iA_j x,\ x \in \mathcal{D}(A_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Припускаємо, що A_j є замкненими, щільно визначеними операторами з областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$. Тоді оператор $A = (A_1, \ldots, A_n)$ визначений над банаховим простором $\mathcal{Y}$. Розглянемо в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ підпростір $D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) := \{x(t) \in D_\Gamma(\mathcal{Y}) : x(0) = 0\}$.

Оскільки для довільного розподілу $f \in D'_\Gamma$ оператор $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ та оператор зсуву $I_\mathcal{Y} \otimes T_s$, $s \in \Gamma$ вздовж конуса Γ належать простору $L[D^o_\Gamma(\mathcal{Y}), D_\Gamma(\mathcal{Y})]$ лінійних неперервних відображень із $D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$, то справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. *Для кожного розподілу $f \in D'_\Gamma$ оператор $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ є лінійним неперервним перетворенням простору $D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ і є ядерним оператором, що інваріантний відносно векторного оператора зсуву $I_\mathcal{Y} \otimes T_s$. Навпаки, для кожного лінійного неперерв-ного перетворення $I_\mathcal{Y} \otimes K \in L[D^o_\Gamma(\mathcal{Y}), D_\Gamma(\mathcal{Y})]$, яке інваріантне відносно зсуву, існує єдиний розподіл $f \in D'_\Gamma$ такий, що $K = M_f$ для всіх $x \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$.*

Доведення. За означенням

$$(I_\mathcal{Y} \otimes M_f)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \langle f, T_s(\varphi_m)_\Gamma\rangle,$$

де послідовності $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ і $\{T_s(\varphi_m)_\Gamma\}_{m\in\mathbb{N}}$ прямують до нуля в $\mathcal{Y}$ та D^o_Γ відповідно. Тоді в силу відомого критерію ядерності (див. [5, гл. X, ст. 401]) випливає, що $I_\mathcal{Y} \otimes M_f$ – ядерний оператор.

Для довільної функції $x(t) \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ та розподілу $f \in D'_\Gamma$ маємо:

$$(I_\mathcal{Y} \otimes M_f \circ T_s)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m\ (M_f \circ T_s(\varphi_m)_\Gamma)(t) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m\ (T_s \circ M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t) = (I_\mathcal{Y} \otimes T_s \circ M_f)x(t).$$

Навпаки, нехай для довільної функції $\varphi_\Gamma \in D^o_\Gamma$ лінійний неперервний функціонал $f : \varphi_\Gamma \to (K\varphi_\Gamma)(0)$ визначає розподіл $f \in D'_\Gamma$, якщо доозначити f на всьому $\mathbb{R}^n$ як тотожно нульовий функціонал. Тоді для довільної функції $x(t) \in D_\Gamma(\mathcal{Y})$ можна записати, що $\langle f, x\rangle = (I_{\mathcal{Y}} \otimes K)x(0) = (I_{\mathcal{Y}} \otimes M_f)x(0)$ (див. [4]). Якщо тепер в останню рівність замість $x(t)$ підставити функцію $(I_{\mathcal{Y}} \otimes T_s)x(t)$ і скористатися властивістю інваріантності, яка для оператора $I_{\mathcal{Y}} \otimes K$ виконується за умовою теореми, то отримаємо потрібне співвідношення $(I_{\mathcal{Y}} \otimes K)x(s) = (I_{\mathcal{Y}} \otimes M_f)x(s)$, $s \in \Gamma$. □

Визначимо відповідні Фур'є-образи просторів $D_\Gamma(\mathcal{Y})$ та $D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ вигляду

$$\widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y}) := \{\widehat{x} = \int\limits_\Gamma U_s x(s)ds : \quad x(s) \in D_\Gamma(\mathcal{Y})\}$$

і

$$\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}) := \{\widehat{x} = \int\limits_\Gamma U_s x(s)ds : \quad x(s) \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})\}.$$

Теорема 3. *Якщо $\{U_s : s \in \Gamma\}$ – n-параметрична (C_0)-напівгрупа операторів, то підпростір $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ щільний в банаховому просторі $\mathcal{Y}$.*

Доведення. Для довільного $m \in \mathbb{N}$ існує нескінченно диференційована фінітна функція $\varphi_m = \varphi_m(s)$ з властивостями $\varphi_m(s) \geq 0$, $\operatorname{supp} \varphi_m \subset \Gamma_{\frac{1}{m}}$, $\int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \varphi_m(s)ds = 1$. Для довільного $y \in \mathcal{Y}$ побудуємо в просторі $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ послідовність $\widehat{y}_m$, де $y_m = y \otimes \varphi_m$. Тоді

$$\|\widehat{y}_m - y\| = \| \int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \varphi_m(s)U_s y ds - \int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \varphi_m(s) y ds\| \leq$$

$$\int\limits_{\Gamma_{\frac{1}{m}}} \|U_s y - y\|\varphi_m(s)ds \leq \sup_{s\in\Gamma_{\frac{1}{m}}} \|U_s y - y\|.$$

Оскільки $\{U_s : s \in \Gamma\}$ – n-параметрична (C_0)-напівгрупа, то для кожного елемента $y \in \mathcal{Y}$ одержуємо $\sup\limits_{s\in\Gamma_{\frac{1}{m}}} \|U_s y - y\| \to 0$ при $m \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} \widehat{y}_m = y$ для всіх $y \in \mathcal{Y}$. □

Нехай $L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})]$ – алгебра лінійних неперервних відображень із підпростору $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ в $\widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Теорема 4. *Відображення*

$$\Phi : \widehat{D}'_\Gamma \ni \widehat{f} \to \widehat{f}(A) \in L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})],$$

де лінійний оператор $\widehat{f}(A)$ визначається формулою

$$\widehat{f}(A) : \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni \widehat{x} \to \widehat{f}(A)\widehat{x} = \int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_f)x(s)ds, \tag{3}$$

є неперервним гомоморфізмом алгебри $\widehat{D}'_\Gamma$ в алгебру операторів $L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})]$.

Доведення. З теореми 1 випливає, що кожен елемент $x(s) \in D^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ розкладається в абсолютно-збіжний ряд $x(s) = \sum\limits_{m=1}^\infty \lambda_m x_m \otimes (\varphi_m)_\Gamma(s)$. Користуючись його абсолютною збіжністю, а також неперервністю скалярної операції крос-кореляції M_f, приходимо до висновку, що білінійне відображення $D'_\Gamma \times D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni (f, x) \to \sum\limits_{m=1}^\infty \lambda_m x_m \cdot M_f(\varphi_m)_\Gamma(s)$ є нарізно неперервним. Оскільки U_s є (C_o)-напівгрупою операторів, то з властивостей інтегралу Бохнера буде випливати нарізна неперервність білінійного відображення $D'_\Gamma \times D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni (f, x) \to \widehat{f}(A)\widehat{x}$. Узагальнене перетворення Фур'є F^* розподілів з простору D'_Γ, а також відображення $D^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni x(s) \to \widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ є топологічним ізоморфізмом [3], тому білінійне відображення

$$\omega : \widehat{D}'_\Gamma \times \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}) \ni (\widehat{f}, \widehat{x}) \to \widehat{f}(A)\widehat{x} \in L[\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y}), \widehat{D}_\Gamma(\mathcal{Y})] \tag{4}$$

є теж нарізно неперервним. Простір $\widehat{D}'_\Gamma$ – бочковий, а $\widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ – бочковий, як індуктивна границя бочкових просторів Фреше. Тому до відображення (4) можна застосувати теорему Банаха-Штейнгауза, яка гарантує нам одностайну неперервність відображення Φ.

Те, що відображення Φ здійснює гомоморфізм алгебр, випливає з теореми про топологічний ізоморфізм алгебри D'_Γ комутанту напівгрупи зсувів [1] та властивостей векто-рної операції крос-кореляції (див. [4]). □

Наслідок. *Неперервний гомоморфізм Φ задовольняє співвідношення:*

$$\widehat{\partial^l_j f}(A)\widehat{x} = (-iA_j)^l \widehat{f}(A)\widehat{x} = \widehat{f}(A)(-iA_j)^l \widehat{x}, \tag{5}$$

$$\widehat{\partial^l_j \delta}(A)\widehat{x} = (-iA_j)^l \widehat{x}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

де $f \in D'_\Gamma$, $\widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$, δ – функція Дірака.

Доведення. Для довільного розподілу $f \in D'_\Gamma$ та функції $\widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$, використовуючи формулу (3) операторного числення, запишемо

$$\widehat{\partial^l_j f}(A)\widehat{x} = \int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_{\partial^l_j f})x(s)ds = (-1)^l \int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^\infty \lambda_m U_s x_m M_f \partial^l_j (\varphi_m)_\Gamma(s)ds =$$

$$(-1)^l \int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^\infty \lambda_m U_s x_m \partial^l_j M_f(\varphi_m)_\Gamma(s)ds = (-1)^l \int\limits_\Gamma (U_s \otimes \partial^l_j M_f)x(s)ds.$$

Тоді за допомогою формального інтегрування частинами останнього інтеграла із зауваженням, що $\langle f, \partial^l_j x\rangle = (I_{\mathcal{Y}} \otimes \partial^l_j M_f)x(0) = 0$, отримаємо рівність (5).

Для доведення формули (6) в рівність (5) підставимо функцію Дірака. В такому випадку для довільної функції $\widehat{x} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ отримаємо

$$\widehat{\delta}(A)\widehat{x} = \int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_\delta)x(s)ds =$$

$$\int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^\infty \lambda_m U_s x_m M_\delta(\varphi_m)_\Gamma(s)ds = \int\limits_\Gamma U_s x(s)ds = \widehat{x}, \quad s \in \Gamma.$$

Підставивши знайдене значення в праву частину формули (5), одержимо виконання рівності (6) □

Розглянемо приклади застосування операторного числення, яке реалізується формулою (3).

Приклад 1. *В [3] доведено, що* $\delta = \frac{\widehat{\lambda}_\Gamma}{(2\pi)^n}$, *де* λ_Γ – *характеристична функція конуса* Γ. *Для* n*-параметричної* (C_o)*-напівгрупи* $\{U_s\}_{s\in\Gamma}$ *використаємо позначення* $U_s = e^{-i(s,A)}$, *де* $s \in \Gamma$ *і* A – *генератор цієї напівгрупи. Тоді для функції Дірака* $\delta \in D'_\Gamma$ *запишемо*

$$\delta(A)\widehat{x} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma (U_s \otimes M_{\lambda_\Gamma})x(s)ds =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m e^{-i(s,A)}x_m \cdot M_{\lambda_\Gamma}(\varphi_m)_\Gamma(s)ds = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma e^{-i(s,A)}\int\limits_\Gamma x(t+s)ds =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma e^{-i(s,A)}x(t+s)dsdt = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma \widehat{x(t+s)}dt.$$

Приклад 2. *Застосуємо узагальнене перетворення Фур'є (1) до рівності* $\lambda_\Gamma * \partial_j\delta = \partial_j\delta * \lambda_\Gamma = \delta$, $j = 1,\dots,n$. *Тоді отримаємо*

$$\delta \cdot \widehat{\partial_j\delta} = \widehat{\partial_j\delta}\cdot\delta = \frac{1}{(2\pi)^n},\ j = 1,\dots,n.$$

Отже, функція Дірака δ *має в алгебрі* $\widehat{D}'_\Gamma$ *обернений елемент* $(2\pi)^n\widehat{\partial_j\delta}$. *Використовуючи основну теорему 4 операторного числення, робимо висновок, що для довільної функції* $\widehat{y} \in \widehat{D}^o_\Gamma(\mathcal{Y})$ *рівняння*

$$(2\pi)^n\widehat{\partial_j\delta}(A)\widehat{x} = \widehat{y}$$

має єдиний розв'язок

$$\widehat{x} = \delta(A)\widehat{y} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_\Gamma \widehat{y(t+s)}dt.$$

Література

1. Лопушанський О.В., Соломко А.В., Шарин С.В. Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т.47, №2. — С. 95–99.
2. Соломко А.В., Шарин С.В. Функціональне числення над банаховими просторами в конусі $\mathbb{R}^n_+$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т.47, №4. — С. 51–56.
3. Соломко А.В. Операторне зображення Фур'є-образу згорткової алгебри розподілів на конусі // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 266–272.
4. Соломко А.В., Шарин С.В. Векторна операція крос-кореляції в довільному конусі // Вісник Прикарп. ун-ту. — 2007. — Вип. 3. — С. 29–36.
5. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 359 с.

7. Grothendieck A. Produits tensoriel topologiques et espaces nucleaire // Mem. Amer. Math. Soc. — 16, **2** (1995). — P. 1–140.
8. Schwartz L. Theorie des distribution, I. — Hermann, 1950. — 430 p.
9. Schwartz L. Theorie des distributions, II. — Paris, 1951. — 476 p.

Прикарпатський університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 24.02.2009

Solomko A.V. *Particular case of operator calculus for generalized functions with supports in cone*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 92–99.

In this work the construction of functional calculus for strongly continuous semigroups of operators in Schwartz distribution algebra on some cone is generalized. The partial case of vector valued calculus on the base of modification operator Fourier transformation is researched.

Соломко А.В. *Частичный случай операторного исчисления для обобщенных функций с носителями в конусе // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 92–99.

В этой работе обобщается построение функционального исчисления для сильно непрерывных полугрупп операторов в алгебре распределений Шварца на любой конус. Исследуется частичный случай векторнозначного исчисления с помощью модификации операторного преобразования Фурье.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.76

Я.З.Стасюк, О.Б.Скасків

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СУМИ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Я.З.Стасюк, О.Б.Скасків *Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 100–106.

Для абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, де $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \le n \uparrow +\infty)$, встановлено умови на коефіцієнти його мажоранти Ньютона, за яких співвідношення $F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}$ виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини E нульової логарифмічної щільності у точці 0, рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Вступ

Нехай S_0 — клас функцій F, зображуваних абсолютно збіжними у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де послідовність $\lambda = \{\lambda_j\colon j \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$ попарно різних чисел задовольняє умову

$$\sup\{\lambda_n\colon n \ge 0\} = +\infty. \tag{2}$$

Нехай $S_0(a)$ — клас усіх рядів Діріхле $F \in S_0$ вигляду (1) з фіксованою послідовністю $a = \{|a_n|\colon n \ge 0\}$.

Через S позначимо клас усіх цілих рядів Діріхле з невід'ємними показниками.

У статті [1] доведено, що за умови

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty, \tag{3}$$

де $\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \ln |a_n|$, для кожної функції $F \in S_0(a)$ співвідношення

$$F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}} \tag{4}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\ln\text{-meas}\, E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E\cap[-1,0)} d\ln\left(-\frac{1}{x}\right) < +\infty,$$

рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Тут $\nu(x) = \nu(x,F) = \max\{n\colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$ — центральний індекс ряду (1), а $\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n \ge 0\}$ — його максимальний член.

У статті [2] доведено, що скінченність логарифмічної міри виняткової множини E у співвідношенні (4) за умови (3) є непокращуваним описом.

В [1], крім цього, встановлено, що умова (3) є і необхідною для того, щоб співвідношення (4) виконувалось для кожної функції $F \in S_0(a)$ при $x \to -0$ $(x \notin E, \ln\text{-meas}\, E < +\infty)$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Подібно, як і в [3], виникає запитання про можливість послабити умову (3), накладаючи, можливо, додаткові умови на показники ряду (1). Як і в [3], відповідь на це запитання позитивна.

Надалі розглядатимемо лише підкласи S_0^+, $S_0^+(a)$, до яких належать лише ряди Діріхле відповідно з S_0 і $S_0(a)$, зі строго зростаючою до $+\infty$ системою показників $\lambda = (\lambda_n)$, $0 < \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \uparrow)$.

1 Формулювання основного результату

Для того, щоб сформулювати і потім довести основний результат статті, нам потрібне поняття мажоранти Ньютона ряду Діріхле, а також деякі її властивості.

Мажоранту Ньютона довільного ряду (1) будуємо, як і в [4, с.163] (див. також [5, с.682]). У прямокутній системі координат $\lambda O\mu$ позначимо точки P_n з координатами $(\lambda_n, -\ln|a_n|)$ і проведемо з них вертикальні промені V_n в напрямку додатної півосі $O\mu$. Позначимо через Q опуклу оболонку множини $\bigcup_{n\ge 0} V_n$. Якщо множина Q не є півплощиною, то кожна пряма $\{(\lambda,\mu) : \lambda = \lambda_n\}$, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$, перетинає межу ∂Q множини Q в єдиній точці $\widetilde{P}_n$ з координатами $(\lambda_n, -\ln a_n^*) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_n, -\mu_n^*)$. Формальний ряд $F_* = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* e^{z\lambda_n}$ називаємо *мажорантою Ньютона* ряду (1).

За побудовою ([5]):

$$\text{(i) } a_n^* \ge |a_n| \ \ (n \ge 0);\ \text{(ii) } a_{n+1}^* \ge a_n^* \ \ (n \ge 0);\ \text{(iii) } \varkappa_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_n^* - \mu_{n+1}^*}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \uparrow 0 \ (n \to +\infty);$$
$$\text{(iv) } \mu(x,F) = \mu(x,F_*) \ (x < 0).$$

Наступна лема містить ще одну властивість мажоранти Ньютона.

Лема 1.1 ([4]). *Нехай σ_F і σ_{F_*} — абсциси абсолютної збіжності ряду (1) і мажоранти Ньютона ряду (1) відповідно. Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, то*

$$\sigma_{F_*} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n^*}{\lambda_n} = \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} = \sigma_F.$$

Сформулюємо тепер основний результат.

Теорема 1. *Нехай функція $F \in S_0(a)$, а додатна неспадна на $[t_0, +\infty)$ функція $\psi(t)$ — така, що $(\exists\alpha \in (0,1))(\forall t \ge t_0) : \ln\psi(t) \le t^\alpha$. Якщо виконуються умови*

$$\ln n = o(\lambda_n) \quad (n \to +\infty),$$

$$(\exists n_0)(\forall n \geq n_0): \quad \lambda_n - \lambda_{n_0} \geq \mu_n^* \psi(\mu_n^*) \tag{5}$$

і

$$\frac{1}{\ln \psi\left(\frac{\mu_n^*}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}^* - \mu_k^*} = o(1) \quad (n \to +\infty), \tag{6}$$

то співвідношення (4) виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини E нульової логарифмічної щільності ($D_{\ln_0} E \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup\limits_{R \to -0} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{|R|}\right)} \ln\text{-meas}\,(E \cap [-1, R]) = 0$) рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Схема доведення теореми 1 подібна до схеми доведення відповідної теореми з [1]. Відмінність полягає в тому, що умова (6) не припускає з необхідністю збіжності ряду (3), і тому виникають додаткові трудноці, зокрема, з оцінками залишків ряду Діріхле.

Зауваження. З умови (6) випливає, що $\mu_n^* \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

2 Доведення основного результату

Доведення теореми 1. Як і в [1], позначимо $b_n = e^{-\lambda_n}$ і розглянемо ряд

$$f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{s\mu_n^*}. \tag{7}$$

За нерівністю Коші-Буняковського і умовою $\ln \psi(t) \leq t^\alpha$ $(t \geq t_0)$ отримаємо

$$\frac{1}{\ln \psi\left(\frac{\mu_n^*}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}^* - \mu_k^*} \geq \frac{n^2}{\mu_n^* - \mu_0^*} \cdot \frac{2^\alpha}{(\mu_n^*)^\alpha},$$

а отже, з умови (6) маємо

$$n^{\frac{2}{1+\alpha}} = o(\mu_n^*) \quad (n \to +\infty), \tag{8}$$

тому $\ln n = o(\mu_n^*)$, а отже, з огляду на (5), $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$.

Оскільки для кожного фіксованого $x < 0$ з огляду на лему 1.1 виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln a_n^* - \lambda_n |x|) = -\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mu_n^* + |x| \ln b_n) = -\infty$, то звідси, враховуючи, що $\mu_n^* \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, з огляду на довільність x отримаємо $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{\mu_n^*} \ln b_n\right) = +\infty$. Далі, оскільки з (5) і (8) випливає, що $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, за лемою 1.1 отримуємо, що ряд (7) — абсолютно збіжний скрізь в $\mathbb{C}$.

Наступне допоміжне твердження фактично доведено в [1, с.122-123].

Лема 2.1. *Нехай $f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{s\mu_n^*} \in S$, $\mu_n^* \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, а (ε_k) — послідовність така, що $0 \leq \varepsilon_k \leq 1/2$ $(k \geq 0)$. Тоді існує множина $E_0 \subset [1, +\infty)$ така, що для кожного $\sigma \in [1, +\infty) \setminus E_0$ виконуються рівності*

$$\nu(\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})) = \nu(\sigma), \quad \nu(\sigma) = \nu(\sigma, f), \tag{9}$$

і для всіх $\sigma \in [1, +\infty)$ для логарифмічної міри E_0 справджується оцінка

$$\ln\text{-meas}\,(E_0 \cap [1, \sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E_0 \cap [1,\sigma)} d \ln x \leq 3 \sum_{k=0}^{\nu(\sigma-0)} \varepsilon_k.$$

Доведення. Нехай σ_j — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, f)$, занумерована так, що $\nu(\sigma, f)$ для $\sigma \in [\sigma_j, \sigma_{j+1})$; якщо $\nu(\sigma_{j+1}, f) = j + p$, $p \geq 2$, то вважаємо, що $\sigma_{j+1} = \ldots = \sigma_{j+p} < \sigma_{j+p+1}$.

В [1] доведено, що рівності (9) на проміжку $[\sigma_j, \sigma_{j+1})$ можуть не виконуватися лише на множині $I_j = \left[\sigma_j, \frac{\sigma_j}{1-\varepsilon_j}\right) \cup \left[\frac{\sigma_{j+1}}{1+\varepsilon_j}, \sigma_{j+1}\right)$. Для логарифмічної міри I_j маємо

$$\ln\text{-meas}\,(I_j) \leq \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_j} + \ln(1 + \varepsilon_j) \leq 3\varepsilon_j = 3\varepsilon_{\nu(\sigma_{j+1}-0)}.$$

Якщо $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, то для логарифмічної міри множини $E_0 = \bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j$ отримаємо

$$\ln\text{-meas}\,(E_0 \cap [1, \sigma)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \ln\text{-meas}\,(I_j) + \ln\text{-meas}\,(I_n \cap [\sigma_n, \sigma)) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\nu(\sigma-0)} \ln\text{-meas}\,(I_j) \leq 3 \sum_{j=0}^{\nu(\sigma-0)} \varepsilon_j.$$

Лему 2.1 доведено. □

Подібно, як і в [3], визначимо $q(k) = n_0(2\mu_k^*) - 1$ $(k \geq 0)$, де $n_0(t) = \sum_{\mu_k^* \in [0,t]} 1$ — лічильна функція послідовності (μ_k^*), і

$$\delta(l, j) = (j - l + 1)^{-3/2} \sum_{m=l}^{j} \frac{1}{\mu_{m+1}^* - \mu_m^*} \quad (0 \leq l \leq j),$$
$$\delta_k = \sup\{\delta(l, j) \colon 0 \leq l \leq k - 1, \quad k - 1 \leq j \leq q(\nu) - 1\}.$$

Наступні леми доведено в [3].

Лема 2.2. *Якщо функція $\varphi(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, то з умови*

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{\mu_n^*}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}^* - \mu_k^*} = o(1) \quad (n \to +\infty)$$

випливає, що існує послідовність $c_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що $\varepsilon_k = \delta_k c_k \in [0, 1/2]$ $(k \geq 0)$, і виконується умова

$$\frac{1}{\varphi(\mu_n^*)} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Лема 2.3. *Нехай $\mu_n^* \uparrow +\infty$, а $q(k)$ і ε_k — визначені вище. Тоді*

$$\Sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\nu-1} e^{-\varepsilon_\nu |\mu_n^* - \mu_\nu^*|} + \sum_{n=\nu+1}^{q(\nu)} e^{-\varepsilon_\nu |\mu_n^* - \mu_\nu^*|} = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Доведення наступної леми подібне до доведення леми 4 з [3].

Лема 2.4. *Якщо для функції $F \in S_0(a)$ виконуються умови теореми 1, то*

$$\Sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} |a_n| e^{x\lambda_n} = o(\mu(x,F))$$

при $x \to -0$ зовні деякої множини E_1 скінченної логарифмічної міри.

Доведення. В [3] фактично доведено таке твердження.

Лема 2.5. *Нехай $\psi(t)$ — додатна неспадна функція така, що $\psi(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ і $(\exists \alpha \in (0,1))(\forall t \geq t_0) : \ln \psi(t) \leq t^{\alpha}$. Нехай послідовність $\mu_n^* \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і виконується умова (6). Тоді існує $c_n^* \uparrow +\infty$ така, що $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^*}{\mu_n} < +\infty$, $\frac{c_n^*}{\mu_n} \in [0, 1/2]$ і*

$$\int_{2\mu_{\nu^*}}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\mu_\nu^*} - 1\right) c_{\nu^*}\right\} dn(t) = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Застосуємо лему 2.1 до визначеної вище функції $f \in S$ вигляду (7) з $\varepsilon_n = \frac{c_n^*}{\mu_n^*}$, де $0 \leq c_n^* \uparrow +\infty$ — послідовність така, що $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^*}{\mu_n^*} < +\infty$ і $\varepsilon_n \in [0, 1/2]$ $(n \geq 0)$. Тоді, за лемою 2.1, рівності (9) виконуються для всіх $\sigma \in [1, +\infty) \setminus E_2$, $\ln\text{-meas}\,(E_2 \cap [1, \sigma)) \leq 3 \sum\limits_{k=1}^{\nu(\sigma-0)} \varepsilon_k$, звідки

$$\ln\text{-meas}\, E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \ln\text{-meas}\,(E_2 \cap [1, +\infty)) \leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k < +\infty,$$

тобто E_2 має скінченну логарифмічну міру на проміжку $[1, +\infty)$. Отже, для всіх $\sigma \in [1, +\infty) \setminus E_2$ за означенням максимального члена функції f і за допомогою рівностей (9) послідовно отримуємо

$$b_n \exp\{\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})\mu_n^*\} \leq \mu(\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)}), f) = b_{\nu(\sigma)} \exp\{\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})\mu_{\nu(\sigma)}^*\},$$

звідки

$$b_n e^{\sigma\mu_n^*} \leq \mu(\sigma, f) \exp\{\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)}(\mu_{\nu(\sigma)}^* - \mu_n^*)\sigma\}. \tag{10}$$

Вибираючи знак " - " для $n < \nu(\sigma)$ і знак " + " для $n > \nu(\sigma)$, отримаємо нерівність

$$(\forall n \geq 0)(\forall \sigma \in [1, +\infty) \setminus E_2) : \quad b_n e^{\sigma\mu_n^*} \leq \mu(\sigma, f) \exp\{-\sigma|\mu_n^* - \mu_\nu^*|\varepsilon_\nu\}, \quad \nu = \nu(\sigma). \tag{11}$$

Оскільки $b_n = e^{-\lambda_n}$, $\mu_n^* = \ln a_n^*$, $\sigma = -\frac{1}{x}$, з (11) отримаємо для всіх $n \geq 0$ і $x \in [-1, 0) \setminus E_1$, де E_1 — образ множини E_2 при відображенні $x = -\frac{1}{\sigma}$,

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq a_n^* e^{x\lambda_n} = (b_n e^{\sigma\mu_n^*})^{-x} \leq (\mu(\sigma, f))^{-x} (\exp\{-\sigma|\mu_n^* - \mu_\nu^*|\varepsilon_\nu\})^{-x} =$$
$$= \left(b_{\nu(\sigma,f)} e^{\sigma\mu_{\nu(\sigma,f)}^*}\right)^{-x} e^{-|\mu_n^* - \mu_{\nu(\sigma,f)}^*|\varepsilon_{\nu(\sigma,f)}} = \exp\{x\lambda_{\nu(\sigma,f)} + \mu_{\nu(\sigma,f)}^*\} \cdot e^{-|\mu_n^* - \mu_{\nu(\sigma,f)}^*|\varepsilon_{\nu(\sigma,f)}}.$$

Зауважимо, що для $n \neq \nu(\sigma, f)$ і $\varepsilon_{\nu(\sigma,f)} \neq 0$ маємо $e^{-|\mu_n^* - \mu_{\nu(\sigma,f)}^*|\varepsilon_{\nu(\sigma,f)}} < 1$. Отже

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)} + \mu_{\nu(\sigma,f)}^*} = a_{\nu(\sigma,f)}^* e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)}} = \mu(x, F_*),$$

звідки $\mu(x, F) = \mu(x, F_*) = a_{\nu(\sigma,f)}^* e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)}} = |a_{\nu(\sigma,f)}| e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)}}$, а тому $\nu(x, F) = \nu(\sigma, f) = \nu\Big(-\frac{1}{x}, f\Big)$ і $(\mu(\sigma, f))^{-x} = b_{\nu(x,F)}^{-x} e^{\mu_{\nu(x,F)}^*} = |a_{\nu(x,F)}| e^{\lambda_{\nu(x,F)}x} = \mu(x, F)$.

Отже, для всіх $n \geq 0$ і $x \in [-1, 0) \setminus E_1$ маємо

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F) e^{-|\mu_n^* - \mu_\nu^*| c_\nu^* / \mu_\nu^*},$$

а тому

$$\Sigma_1 / \mu(x, F) \leq \sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{\mu_n^*}{\mu_\nu^*} - 1\right) c_\nu^*\right\} = \sum_{\mu_n^* > 2\mu_\nu^*} \exp\{-(\mu_n^*/\mu_\nu^* - 1)c_\nu^*\} =$$
$$= \int_{2\mu_\nu^*}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\mu_\nu^*} - 1\right) c_\nu^*\right\} dn(t).$$

Звідси, за лемою 2.5 отримуємо твердження леми 2.4.

□

Завершення доведення теореми 1. Нехай E — образ множини E_0 з леми 2.1 при відображенні $x = -\frac{1}{\sigma}$. Тоді за лемою 2.1 маємо

$$\ln\text{-meas}\,(E \cap [-1, R)) = \int_{E \cap [-1,R)} d \ln\left(-\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \int_{E_0 \cap [1, -\frac{1}{R})} d \ln t \leq 3 \sum_{k=0}^{\nu(0-\frac{1}{R}, f)} \varepsilon_k = 3 \sum_{k=0}^{\nu(R-0,F)} \varepsilon_k.$$

Оскільки при $R \to -0$ для $n = \nu(R - 0, F)$ маємо $0 \leq \ln \mu(R, F) - \ln |a_{n_0}| - \lambda_{n_0} R = \mu_n^* - \mu_{n_0}^* + (\lambda_n - \lambda_{n_0})R$, то $|R| \leq \frac{\mu_n^* - \mu_{n_0}^*}{\lambda_n - \lambda_{n_0}}$, а отже

$$\frac{1}{|R|} \geq \frac{\lambda_n - \lambda_{n_0}}{\mu_n^* - \mu_{n_0}^*} \geq \frac{\mu_n^* \psi(\mu_n^*)}{\mu_n^* - \mu_{n_0}^*} = (1 + o(1))\psi(\mu_n^*) \quad (n \to +\infty).$$

Звідси

$$\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{|R|}\right)} \int_{E \cap [-1,R)} d \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \frac{4 \sum_{k=0}^{\nu(R-0,F)} \varepsilon_k}{\ln \psi(\mu_{\nu(R,F)}^*)} \leq \frac{4 \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k}{\ln \psi(\mu_n^*)} \to 0 \quad (R \to -0).$$

Тут ми скористались лемою 2.2 з функцією $\varphi(x) = \ln \psi(x)$.

Нехай $x \in [-1, 0) \setminus E$. Тоді $\sigma = -\frac{1}{x} \in [1, +\infty) \setminus E_0$ і за лемою 2.1, подібно, як і у доведенні леми 2.4, за означенням $\mu(\sigma, f)$ послідовно отримаємо, що нерівність (10) виконується з довільним вибором знаків "±", звідки, вибираючи знаки, як і у доведенні леми 2.4, отримуємо нерівність (11) для всіх $\sigma \in [1, +\infty] \setminus E_0$. Тепер з (11) для всіх n і всіх $x \in [-1, 0) \setminus E$ отримуємо

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq \left(\mu\left(-\frac{1}{x}, f\right)\right)^{-x} \exp\left\{-\varepsilon_{\nu(-\frac{1}{x}, f)} \left|\mu_n^* - \mu_{\nu(-\frac{1}{x}, f)}^*\right|\right\}.$$

Як і в доведенні леми (2.4) , маємо $\nu\Big(-\frac{1}{x}, f\Big) = \nu(x, F)$ і $\Big(\mu(-\frac{1}{x}, f)\Big)^{-x} = \mu(x, F)$. Отже, для $x \in [-1, 0) \setminus E$ і всіх $n \geq 0$

$$|a_n|e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F)\exp\{-\varepsilon_{\nu(x,F)}|\mu_n^* - \mu_{\nu(x,F)}^*|\}.$$

Застосовуючи леми 2.3 і 2.4, при $x \to -0$ ($x \notin E \cup E_1$) отримаємо

$$\frac{1}{\mu(x, F)}\left|F(x + iy) - a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}\right| \leq \Sigma_1/\mu(x, F) + \Sigma_0 = o(1)$$

рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Оскільки множина $E \cup E_1$ має нульову логарифмічну щільність, теорему 1 доведено. □

Література

1. Скаскив О.Б. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей*// Мат. заметки. – 1994. – Т.56, №5. – С.117–128.
2. Стасюк Я.З. *Про ряди Діріхле з монотонними коефіцієнтами і остаточність опису винятковоі множини*// Матем. вісник НТШ. - 2008. - Т.5. - С.202 -207.
3. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле з монотонними коефіцієнтами*// Математичні студії. – 2009. – Т.31, № 1. – С.37–46.
4. Гече Ф.И., Онипчук С.В. *Об абсциссах сходящегося ряда Дирихле и его мажоранты Ньютона*// Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26, № 2. – С.161–168.
5. Скаскив О.Б. *О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле*// Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, № 5. – С.681–693.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна.

Надійшло 10.04.2009

Ya.Z.Stasyuk, O.B.Skaskiv *On the equivalence of the sum and the maximal term of the Dirichlet series absolutely convergent in the half-plane*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 100–106.

For absolutely convergent in the half-plane $\{z\colon \mathrm{Re}\, z < 0\}$ Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, where $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, we establish conditions on the coefficients of its Newton majorant, sufficient for the relation $F(x + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}$ to hold as $x \to -0$ outside some set E of zero logarithmic density in the point 0, uniformly by $y \in \mathbb{R}$.

Я.З.Стасюк, О.Б.Скаскив *Об эквивалентности суммы и максимального члена абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 100–106.

Для абсолютно сходящихся в полуплоскости $\{z\colon \mathrm{Re}\, z < 0\}$ рядов Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, где $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, установлены условия на коэффициенты его мажоранты Ньютона, достаточные для справедливости соотношения $F(x + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}$ при $x \to -0$ вне некоторого множества E нулевой логарифмической плотности в точке 0, равномерно по $y \in \mathbb{R}$.

Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

Василишин Б.В., Кондур О.С.

До ювілею професора, доктора фізико-математичних наук Івасишена Степана Дмитровича

Василишин Б.В., Кондур О.С. *До ювілею професора, доктора фізико-математичних наук Івасишена Степана Дмитровича // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 107–109.

70 років виповнилось нашому земляку — відомому українському математику світового рівня, визначному педагогу, доктору фізико-математичних наук, професору Степану Дмитровичу Івасишену. Народився С.Д. Івасишен 10 грудня 1937 року в с. Угорники (нині місто Івано-Франківськ). Шкільні роки майбутнього математика пройшли спочатку у семирічці села Підлужжя, що поблизу Угорників, а потім — в Угорницькій середній школі. У студентську пору в Чернівецькому державному університеті ім. Ю. Федьковича на математичному відділенні фізико-математичного факультету йому пощастило слухати лекції відомих математиків К.М. Фішмана, М.Г. Біляєва, Ю.М. Круга, В.П. Рубаника, С.Д. Ейдельмана та ін. Під керівництвом професора С.Д. Ейдельмана почали формуватись наукові інтереси допитливого і сумлінного студента. Вони стосувалися теорії параболічних рівнянь із частинними похідними. Саме їм присвячені і обидві дисертації С.Д. Івасишена та наукові дослідження його учнів. Захист кандидатської дисертації "Оценки решений $2b$-параболических систем и их применения" відбувся у 1963 році на Об'єднаній вченій раді Інститутів математики, кібернетики та Головної астрономічної обсерваторії АН УРСР (науковий керівник — доктор фізико-математичних наук, професор С.Д. Ейдельман, офіційні опоненти: доктори фізико-математичних наук, професори

Ю.М. Березанський, Ю.Л. Далецький, кандидат фізико-математичних наук В.С. Королюк), а докторської "Матрицы Грина параболических граничних задач" — у 1981 році на спеціалізованій вченій раді Інституту математики АН УРСР (науковий консультант — доктор фізико-математичних наук, професор С.Д. Ейдельман, офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор В.О. Солонников, члени-кореспонденти АН УРСР, доктори фізико-математичних наук, професори Ю.М. Березанський, І.І. Данилюк).

С.Д. Івасишен відомий в науковому світі як дослідник фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для рівномірно параболічних і з виродженнями на початковій гіперплощині систем рівнянь, матриць Гріна загальних параболічних крайових задач і задач спряження. Ним і його учнями знайдено необхідні та достатні умови зображення розв'язків широких класів параболічних рівнянь та систем у вигляді інтеграла Пуассона функцій або узагальнених мір із спеціальних вагових просторів; означено та вивчено нові класи рівнянь і систем: вироджені рівняння типу Колмогорова з $2b$-параболічною частиною за основною групою змінних, p-параболічні псевдо-диференціальні рівняння з виродженнями за частиною змінних, параболічні системи Солонникова-Ейдельмана. Одержані результати висвітлено більш ніж у 200 публікаціях, серед яких 3 монографії та 8 статей монографічного характеру. Видана у 2004 році у співавторстві з Ейдельманом і Кочубеєм монографія "Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type" визнана класичною науковою працею з теорії параболічних рівнянь.

Педагогічну майстерність С.Д. Івасишен почав набувати ще навчаючись в аспірантурі кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету. Тут він пройшов шлях від асистента до доцента, став її завідувачем у 26-річному віці. У діяльності на кафедрі розкрився його непересічний талант педагога, організатора, вченого. З 1969 року Степан Дмитрович майже на два десятиліття пов'язав свою трудову діяльність з Києвом: керував кафедрою вищої математики Київського вищого радіотехнічного училища протиповітряної оборони, потім працював на посаді професора кафедри математичного аналізу Київського державного університету ім. Тараса Шевченка. Згодом він знову повернувся у Чернівці, у рідний університет, щоб організувати кафедру математичного моделювання, якою завідував 15 років. Одночасно створив і очолив у Чернівцях науковий підрозділ Інституту прикладних проблем механіки і математики АН УРСР з вивчення крайових задач для рівнянь з частинними похідними (нині — Чернівецька філія відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача), який став потужним науковим осередком математиків Буковини. З 2003 року — знову у столиці, завідує кафедрою математичної фізики в Національному технічному університеті "Київський політехнічний інститут". Незважаючи на те, що наукову і навчальну діяльність Степан Дмитрович здійснював у навчальних закладах Києва і Чернівців, його постійно турбувало становлення математичної школи у Прикарпатському університеті. Впродовж багатьох років він читає тут спеціальні курси, забезпечує підготовку магістерських, дипломних робіт, керує науковим семінаром, консультує молодих викладачів, аспірантів.

Педагогічно-організаційну діяльність Степан Дмитрович завжди тісно пов'язує з

активною науково-організаційною роботою. За його керівництва регулярно і плідно працювали математичні наукові семінари в Чернівцях. Степан Дмитрович — постійний член спеціалізованої вченої ради у Чернівецькому національному університеті ім. Ю. Федьковича. В 2001-2006 роках член експертної ради з математики ВАК України. З його ініціативи засновано випуск збірника наукових праць "Науковий вісник Чернівецького університету", який є фаховим математичним виданням. Він член редколегій 4 наукових фахових журналів; рецензент американського журналу "Mathematical Reviews", "Українського математичного журналу"; залучається до роботи в організаційних та програмних комітетах багатьох міжнародних і всеукраїнських наукових конференцій. С.Д. Івасишена обрано академіком Академії наук вищої школи України, одним з фундаторів якої він є. Він — член Українського та Американського наукових математичних товариств. За самовіддану працю С.Д. Івасишен нагороджений Орденом Трудового Червоного прапора, Ювілейною медаллю "За доблесну працю", Знаком "Відмінник освіти України".

В особі Степана Дмитровича Івасишена поєднані найкращі якості людини і високий професіоналізм вченого, педагога, організатора. Колеги й учні цінують його за велику життєву мудрість, людяність, надзвичайну порядність і принциповість, вимогливість до себе та інших, колосальну працездатність, широку ерудицію, глибокі знання та активну позицію в науці й громадському житті або ж коротко: за інтелігентність в її найвищому прояві.

Свій ювілей професор Івасишен зустрів у розквіті творчих сил. Надійною опорою йому в житті, вірним другом, помічником у багатьох справах є дружина Ірина Іванівна — висококласний хірург, надзвичайно доброзичлива людина, також наша землячка. Радість і втіху має він від дітей і онуків. Щиро бажаємо Степану Дмитровичу міцного здоров'я, багато плідних, сонячних та приємних літ життя, реалізації нових ідей з теорії параболічних рівнянь із частинними похідними, яка є його пристрастю вже півстоліття.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
м. Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 22.12.2008

Vasylyshyn B.V., Kondur O.S. *To jubilee of professor, professor of physical and mathematical sciences Ivasyshen Stepan Dmytrovych*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 107–109.

Василишин Б.В., Кондур О.С. *К юбилею профессора, доктора физико-математических наук Ивасишена Степана Дмитриевича // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 107–109.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 1, №1
2009

Відповідальний за випуск	д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція	Лабачук О.
Комп'ютерна правка та макетування	Максимів В.В.

Підписано до друку 25.05.2009 р. Формат 60×84/8.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 12,24. Наклад 300 примірників. Замовлення 35

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32